

Eléments de mécanique des fluides

Notes de cours de l'année 2011-2012

M. PIROTTON – P. ARCHAMBEAU

Ces notes consistent en une explication structurée des développements présentés lors du cours oral. L'ensemble des développements réalisés lors des séances est repris dans ces pages avec des explications complémentaires permettant une meilleure assimilation de la matière et une prise de recul suffisante pour établir les liens nécessaires entre les différentes parties de matière.

Malgré tout, cet ensemble ne constitue pas une approche exhaustive de la mécanique des fluides et ne doit pas être considéré en l'état comme un livre de référence au même titre que les sources éditées référencées. Le lecteur prendra donc soin, le cas échéant, de recourir à de la littérature plus spécialisée pour les éléments supplémentaires qu'il souhaiterait aborder.

La bonne compréhension des développements mathématiques demande au lecteur de solides bases en analyse, algèbre et physique. Même si une grande partie des théorèmes ou formules est rappelé lors des développements, il sera utile de se référer aux documents pédagogiques de ces matières, notamment pour se rappeler les hypothèses et conditions d'emploi des différentes formules.

Chapitre 1 : Notions générales sur les fluides	1
1. Généralités	3
2. Particularités d'un fluide	3
3. Loi de comportement	5
4. Domaines d'application	7
5. Propriétés d'un fluide.....	7
6. Niveaux d'idéalisation possibles	12
Chapitre 2 : Statique des fluides.....	13
1. La pression	15
2. Equation fondamentale	17
3. Applications	19
4. Stabilité des corps	27
Chapitre 3 : Etablissement des équations.....	31
1 Notion de base : dérivée particulaire.....	35
2 Conservation d'une grandeur pour un volume particulaire.....	35
3 Principes de conservation.....	41
4 Loi de Bernoulli selon une ligne de courant	47
5 Conservation de l'énergie	54
6 Expression de la rotation d'une particule fluide.....	56
7 Expressions des tensions visqueuses	63
8 Équations de Navier-Stokes	69
9 Equations d'Euler	70
Chapitre 4 : Similitudes.....	75
1. Introduction	79
2. Dimensions d'une grandeur.....	79

3.	Dimensions des grandeurs et équations	81
4.	La similitude.....	82
5.	Détermination des lois de similitude par méthode directe	84
6.	Détermination des lois de similitude par analyse dimensionnelle.....	87
7.	Utilisation pratique des similitudes	92
8.	Lois de similitudes classiques.....	98
9.	Exemples concrets.....	101
Chapitre 5 : Stabilité des écoulements et turbulence		109
1.	Expérience de Reynolds	113
2.	Unicité de la solution.....	114
3.	Exemples d'instabilité.....	119
4.	Etude de stabilité linéaire.....	122
5.	Turbulence.....	133
Chapitre 6 : Ecoulements externes.....		143
1.	Principes de « trainée » et « portance »	147
2.	Vecteur potentiel et Fonction de courant	147
3.	Notions de « fluide parfait » ou « fluide idéal »	150
4.	Ecoulement irrotationnel	154
5.	Solutions analytiques d'écoulements irrotationnels.....	159
6.	Ecoulement idéalisé autour d'une aile.....	180
7.	Ecoulement irrotationnel à surface libre d'un fluide incompressible	183
8.	Ecoulement irrotationnel entre deux cylindres coaxiaux	189
Chapitre 7 : Ecoulements internes		193
1.	Introduction.....	199
2.	Couche limite laminaire.....	202
3.	Couche limite turbulente	216
4.	Comparaison de la couche limite laminaire et turbulente.....	226

5.	Notion de régime non établi et établi.....	230
6.	Ecoulement de Stokes	231
7.	Solutions analytiques d'écoulements laminaires plans.....	239
8.	Ecoulements en films minces.....	242
9.	Ecoulements en conduite.....	245
10.	Ecoulement laminaire en conduite – Ecoulement de Poiseuille.....	257
11.	Ecoulement turbulent en conduite	262
12.	Coefficient d'inégale répartition de vitesse dans Bernoulli intégré.....	269
13.	Récapitulatif des pertes de charge.....	270
Annexe 1 : Calcul vectoriel et tensoriel		275
1.	Définition	277
2.	Représentation dans un espace 3D.....	277
3.	Opérations sur les tenseurs	280
4.	Opérations sur des champs tensoriel	281
5.	Intégrales sur volumes et surfaces	284
Annexe 2 : Notions cinématiques.....		287
1.	Référentiel d'inertie.....	289
2.	Stationnaire vs instationnaire	289
3.	Description cinématique d'un écoulement	289
4.	Descriptions Lagrangienne et Eulérienne	296
Annexe 3 : Equations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques.....		299
1.	Expressions des équations de N-S dans les deux systèmes de coordonnées	301
2.	Démonstration	302

Chapitre 1 : Notions générales sur les fluides

Objectifs

- Définition d'un fluide et de ses propriétés principales
- Lien entre déformations et contraintes dans le fluide
- Exemples de domaines d'application de la Mécanique des Fluides
- Principaux niveaux d'idéalisation possibles

Table des matières

1.	Généralités	3
1.1.	Vision macroscopique	3
1.2.	Equilibre thermodynamique.....	3
2.	Particularités d'un fluide	3
2.1.	Déformation et taux de déformation axiale	4
2.2.	Notion de déformation et taux de déformation angulaire	4
3.	Loi de comportement des fluides.....	5
4.	Domaines d'application	7
5.	Propriété d'un fluide	7
5.1.	Grandeur intensive et extensive.....	7
5.1.1.	Extensive	7
5.1.2.	Intensive	7
5.2.	Masse volumique ρ	7
5.3.	Compressible et incompressible	9
5.4.	Viscosité d'un fluide.....	9
5.4.1.	Généralités	9
5.4.2.	Température et viscosité.....	10
5.4.3.	Viscosité cinématique.....	10
5.5.	La pression de vapeur saturante	10
5.6.	Tension de surface	11
6.	Niveaux d'idéalisation	12

1. Généralités

La mécanique des fluides est une branche de la physique qui a pour objet l'étude des écoulements de fluides¹.

1.1. Vision macroscopique

Un fluide est composé de molécules dont les mouvements individuels sortent du cadre de ce cours. Dès lors, une vision macroscopique, dans laquelle les lois de la mécanique de Newton s'appliquent, sera adoptée.

Seront donc considérés :

- un milieu continu ;
- l'étude d'un petit volume de fluide composé d'un grand nombre de molécules ;
- négligeables les variations statistiques des propriétés.

1.2. Equilibre thermodynamique

De manière générale, les processus moléculaires se déroulent à une échelle temporelle courte vis-à-vis du mouvement macroscopique. Les variables d'état² ne sont donc liées que par des relations d'équilibre. Ainsi, dans la plupart des applications existantes, il n'y a pas lieu de tenir compte de la thermodynamique hors équilibre excepté dans des cas très spécifiques : gaz très compressibles à haute vitesse, vols d'engins spatiaux en rentrée d'atmosphère...

2. Particularités d'un fluide

Une propriété fondamentale des fluides réside dans la facilité avec laquelle ils peuvent être déformés. Alors qu'un matériau solide se présente sous une forme définie et relativement indépendante des conditions extérieures, un fluide n'a pas de forme privilégiée.

La majorité des fluides qui nous intéressent s'écoulent lorsqu'ils sont soumis à une force tangentielle, aussi faible soit elle. Le fluide oppose éventuellement une résistance, mais celle-ci ne peut généralement empêcher le fluide de s'écouler.

¹ De manière générale, un fluide désigne aussi bien un gaz qu'un liquide.

² Notion de thermodynamique : l'état d'un système est caractérisé par la donnée d'un certain nombre de paramètres appelés variables d'état : volume, pression, température, ...

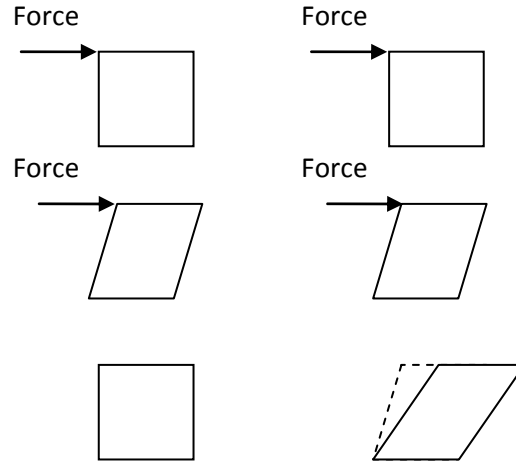


Figure 1 : application puis retrait d'une force sur un liquide et un solide

Autrement dit, alors que le solide a tendance à revenir à son état initial après qu'une force ait été appliquée, le fluide, lui, continue à se déformer (à s'écouler).

Cette déformation est quantifiée par une déformation et un taux de déformation, axiale ou angulaire.

2.1. Déformation et taux de déformation axiale

La déformation axiale ε est définie comme suit :

$$\varepsilon = \frac{P'Q' - PQ}{PQ} = \frac{(x_2 + u_2 \Delta t - x_1 - u_1 \Delta t) - (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{u_2 \Delta t - u_1 \Delta t}{x_2 - x_1} \quad (1.1)$$

De même, le taux de déformation axiale est défini par:

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t} = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.2)$$

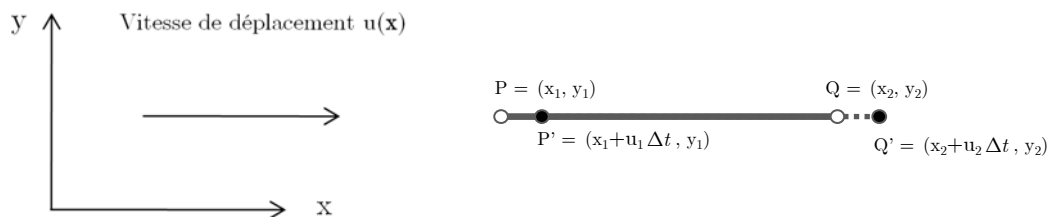


Figure 2 : déformation axiale

2.2. Notion de déformation et taux de déformation angulaire

En plus de la déformation axiale, une déformation angulaire est définie. À l'aide de la Figure 3, on trouve aisément :

$$\tan(\theta) = \frac{QQ' - PP'}{PQ} = \frac{(x_1 + u_2 \Delta t - x_1) - (x_1 + u_1 \Delta t - x_1)}{y_2 - y_1} = \frac{u_2 \Delta t - u_1 \Delta t}{y_2 - y_1} \quad (1.3)$$

En posant θ petit, la tangente de l'angle peut être assimilée à l'angle lui même :

$$\tan(\theta) \cong \theta \quad (1.4)$$

Le taux de déformation angulaire correspondant est défini par:

$$\frac{\theta}{\Delta t} = \frac{u_2 - u_1}{y_2 - y_1} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.5)$$

en prenant la limite du rapport pour $\Delta y \rightarrow 0$.

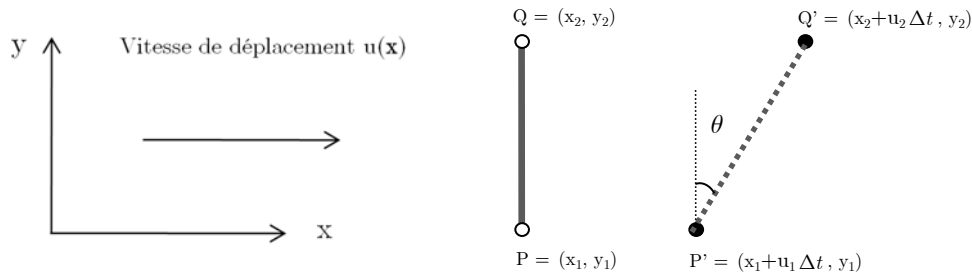


Figure 3 : Déformation angulaire

3. Loi de comportement

Le terme fluide englobe aussi bien les liquides que les gaz. Du point de vue microscopique, la différence entre les liquides et les gaz provient essentiellement de l'importance relative des forces intermoléculaires. Ces dernières sont pratiquement négligeables pour les gaz dans des conditions normales, au contraire des liquides.

En conséquence, les gaz sont fortement compressibles alors que les liquides le sont bien moins. D'ailleurs, pour ces derniers, l'hypothèse d'un « fluide incompressible » sera souvent appliquée.

Pour un solide avec un comportement élastique linéaire, la loi de Hooke est utilisée pour lier contraintes et **déformations**.

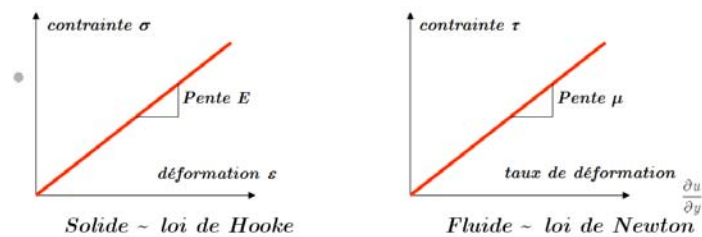


Figure 4 : lois de Hooke et de Newton

Pour un fluide, une démarche similaire est appliquée pour relier contrainte et **taux de déformation**. Le pendant de la loi de Hooke est la loi de Newton qui relie de façon linéaire la contrainte tangentielle entre les filets fluides au taux de déformation angulaire par l'intermédiaire de la viscosité³ :

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.6)$$

Il s'ensuit qu'un fluide en mouvement de translation uniforme ne subit pas de contrainte tangentielle en son sein. Le comportement aux frontières fera l'objet de descriptions détaillées par la suite.

La loi de Newton n'est cependant pas la seule loi de comportement pour les fluides. Les lois de comportement les plus connues sont reprises sur la Figure 5

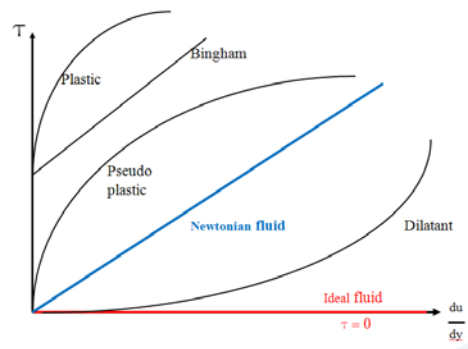


Figure 5 : lois de comportement

Quelques exemples pour ces fluides sont donnés ci-dessous :

- Fluide idéal : l'Hélium superfluide à $T < 2.17$ K (non visqueux et supraconducteur de chaleur)
- Fluide Newtonien : eau et air en général
- Fluide de Bingham : la pâte à dentifrice ; elle ne peut sortir du tube sous l'effet de son propre poids, il faut lui appliquer une contrainte nettement supérieure pour qu'elle s'écoule.
- Pseudo-plastique : polymère à longue chaîne en solutions ou fondu, pâte à papier, ciment, ...
- Dilatant : solution d'amidon, sables mouillés et compactés,...

³ Dans le cas d'un écoulement selon x et d'une distribution linéaire des vitesses selon y

4. Domaines d'application

Les domaines d'applications sont nombreux. Ainsi, en aéronautique, l'écoulement du fluide gazeux (air) autour des profils d'ailes d'avions est primordial.

En hydraulique, le domaine est restreint aux écoulements de fluide liquide (eau) dans des conduites (écoulement sous pression) ou dans des rivières et canaux (écoulement à surface libre).

La Mécanique des Fluides est également déterminante dans des domaines tels que l'ingénierie navale, l'hémodynamique, la météorologie, l'électromécanique, l'océanographie, ...

5. Propriétés d'un fluide

5.1. Grandeur intensive et extensive

5.1.1. Extensive

Définition : sa valeur pour un système composé de deux sous-systèmes est égale à la somme des valeurs de cette grandeur pour chaque sous-système.

Exemple: soit un système formé de deux blocs ayant une masse de 1kg chacun. La valeur de la masse du système composé des deux blocs vaut la somme des valeurs de masse pour les deux sous-systèmes.

Le volume, la masse, la quantité de mouvement, l'énergie totale, le débit, la section d'écoulement ... sont des grandeurs extensives.

5.1.2. Intensive

Définition : le rapport de deux grandeurs extensives se rapportant au même sous-système.

Exemple : dans l'exemple des deux blocs, la masse volumique du système total ne vaut pas la somme des masses volumiques des sous-systèmes.

La vitesse, la masse volumique, l'énergie spécifique sont des grandeurs intensives.

5.2. Masse volumique ρ

La masse volumique d'un volume de fluide :

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\text{Masse d'un volume de fluide}}{\text{Volume de ce fluide}} \quad \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \quad (1.7)$$

En toute généralité, la masse volumique⁴ ρ dépend de la pression et de la température (fluides compressibles) via la relation d'état suivante:

$$\Delta\rho = -\frac{\rho}{K}\Delta p \quad (1.8)$$

Avec $K = K(p, T)$ le module de compressibilité.

Le cas d'un fluide compressible dont la masse volumique ne dépend que de la pression définit un fluide barotrope. Pour un fluide barotrope, la relation (1.8) reste valable avec $K = K(p)$.

Dans un fluide barotrope idéal, la variation de la pression se fait seulement avec la variation de la masse volumique :

- la température (T) est égale partout à un niveau de pression (P)
- un flux⁵ à un niveau de pression donné ne change pas la température à ce niveau.

Pour un fluide barotrope :

$$\frac{1}{\rho(p)}\nabla p = \nabla \int \frac{dp}{\rho(p)} \quad (1.9)$$

En effet, pour une fonction $H(p)$ donnée :

$$\nabla H(p) = \frac{dH}{dp}\nabla p \quad (1.10)$$

Dans ce cas :

$$H(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)} \quad (1.11)$$

Remarque :

- un fluide incompressible de masse volumique homogène est barotrope
- un fluide incompressible de masse volumique non homogène n'est pas barotrope

La densité d'un fluide est le rapport de la masse volumique à la masse volumique d'un fluide de référence (air pour les gaz et eau pour les liquides). La densité est donc une grandeur adimensionnelle.

Le poids spécifique s'exprime quant à lui de la manière suivante :

$$\gamma = \rho g \quad \left(\frac{N}{m^3} \right) \quad (1.12)$$

avec g l'accélération de la gravité. Le tableau suivant donne un ordre de grandeur pour l'air et pour l'eau, les deux principaux fluides abordés dans ce cours :

⁴ À ne pas confondre avec la **densité** (définie plus en avant)

⁵ Quantité de fluide à travers une frontière quelconque

	Masse volumique [Kg/m ³]	Poids spécifique [N/m ³]	Densité
Air sec 5 C°	1.269	12.45	1
Eau à 4 C°	1000	9810	1

Tableau 1 : ordre de grandeurs pour l'eau et l'air

Attention que ces valeurs sont dépendantes de la température. Il existe une relation approximative liant la variation de la masse volumique de l'eau avec la température :

$$\rho_{eau} = 1000 - \frac{(T - 4)^2}{180} \quad (1.13)$$

5.3. Compressible et incompressible

Au sens strict, il est clair qu'aucun fluide n'est incompressible. Dans les applications courantes cependant, l'eau en phase liquide est considérée comme un fluide incompressible. En effet, dans la majorité des cas, la compressibilité de la plupart des liquides est si faible que son influence sur l'écoulement est négligeable.

Cette incompressibilité apparente ne simplifie pas nécessairement la résolution des problèmes. D'un point de vue numérique, par exemple, cela peut conduire à de mauvais conditionnements des matrices et donc à une mauvaise convergence dans la résolution des systèmes.

Attention, cela ne veut pas dire que la masse volumique doit être constante spatialement. Un fluide où la masse volumique est constante et homogène est bien entendu incompressible. Cependant, un fluide incompressible peut être hétérogène et donc dans ce cas, au sein du fluide, la masse volumique n'est pas constante.

Exemple : l'eau d'un fleuve qui se déverse dans l'océan est considérée comme un fluide incompressible alors que sa masse volumique varie en fonction de sa teneur en sel.

5.4. Viscosité d'un fluide

5.4.1. Généralités

La viscosité dynamique⁶ d'un fluide décrit la capacité du fluide à s'écouler (fluidité). Un fluide très visqueux s'écoulera moins facilement qu'un fluide peu visqueux vu les contraintes de cisaillement générées.

⁶ La viscosité dynamique est, par abus de langage, souvent simplement appelée « viscosité ».

Le taux de déformation angulaire d'un fluide, pour une force appliquée donnée, est directement lié à la viscosité.

Par exemple dans un fluide Newtonien, la viscosité est identifiée comme la pente de la droite sur la Figure 5. Autrement dit, il s'agit du rapport de la contrainte de cisaillement sur le taux de déformation angulaire :

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{\partial u}{\partial y}} \left(\frac{\text{kg}}{\text{m.s}} \text{ ou } \frac{\text{N.s}}{\text{m}^2} \text{ ou encore Poiseuille} \right) \quad (1.14)$$

5.4.2. Température et viscosité

La viscosité d'un fluide varie souvent en fonction de la température. En effet, la température influence les forces de cohésion intermoléculaire qui sont responsables de la viscosité. La viscosité diminue donc en général avec l'augmentation de la température.

Il faut également noter que le changement de viscosité dû à la température est nettement plus important dans un liquide que dans un gaz.

5.4.3. Viscosité cinématique

La viscosité cinématique quant à elle se définit comme étant le rapport entre la viscosité dynamique et la masse volumique.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right) \quad (1.15)$$

5.5. La pression de vapeur saturante

La pression de vapeur saturante, aussi appelée tension de vapeur ou encore pression de vapeur, est la pression partielle à laquelle la phase gazeuse d'une substance est en équilibre avec sa phase liquide.

Par exemple, lorsqu'un liquide est placé dans un conteneur fermé, une partie de ce liquide s'évapore. L'évaporation sera considérée comme étant à l'équilibre lorsque le nombre de molécules qui sortent du liquide pour se vaporiser est égal au nombre de molécules qui y rentrent pour se liquéfier. Lorsque l'évaporation est à l'équilibre, la pression partielle résultante est appelée **pression de vapeur saturante**.

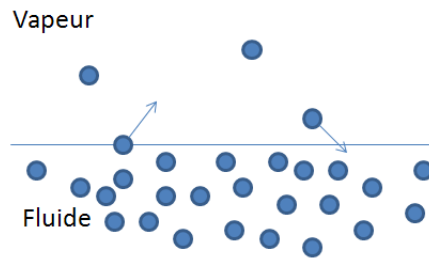


Figure 6 : échange de particules fluides à l'interface fluide-air

La pression de vapeur est différente d'un liquide à l'autre. Elle dépend de la température et de la pression. Par exemple, la pression de vapeur de l'eau est de 1.7 kPa à 101.3 kPa de pression extérieure et une température de 15°C . À 100°C et pour une même pression extérieure, la pression de vapeur vaut 101.3 kPa . La pression de vapeur devient équivalente à la pression extérieure lorsque l'eau atteint une température d'ébullition. A cette température, il n'y a plus de force qui maintient l'eau sous forme liquide, et donc celle-ci s'évapore.

La pression de vapeur est une propriété importante car elle reflète la tendance d'un fluide à s'évaporer dans certaines conditions données.

Dans certaines conditions de confinement et de vitesse, la pression totale peut descendre sous la pression de vapeur saturante. Cela génère des bulles gazeuses de fluide. Lorsque les conditions de pression remontent, ces bulles implosent, ce qui peut détruire à terme les structures. Ce phénomène s'appelle « cavitation ».

5.6. Tension de surface

La tension superficielle (ou de surface) est cette force permettant à une goutte d'eau de ne pas s'étaler sur une feuille, ou à certains insectes de marcher sur l'eau.

Les molécules d'eau sont attirées entre elles par l'énergie moléculaire. Les molécules périphériques à un volume de fluide sont donc uniquement attirées en direction de l'intérieur, ce qui dans certains cas forme une goutte d'eau (la sphère étant le volume de surface la plus petite possible).

Si cette goutte ronde est placée sur un support à faible énergie de surface, les forces d'attractions internes de la goutte seront prépondérantes et la goutte aura un minimum de contact avec le matériau (ex. film plastique).

Si au contraire, le matériau (ex. verre) développe une énergie moléculaire de surface qui se rapproche de celle de l'eau, cette énergie aura tendance à contrebalancer les forces à l'intérieur

de la goutte et celle-ci augmentera sa surface interfaciale avec le matériau ce qui conduira à l'aplatissement de la goutte. Cette propriété du matériau s'appelle la mouillabilité.

L'unité de mesure de la tension superficielle est le newton par mètre (N.m^{-1}) qui est équivalent aux joules par mètre carré (J.m^{-2}) qui est l'unité d'énergie de surface.

6. Niveaux d'idéalisation possibles

La célèbre loi de newton :

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{u} dV \quad (1.16)$$

s'applique bien entendu en mécanique des fluides. Les forces peuvent être la gravité, les résultantes de pression, les frottements, la résultante de tension de surface, la force de Coriolis. Dans certains cas, certaines de ces forces sont négligeables ce qui induit différents niveau d'idéalisation développés dans le cours.

	Gravité	Pression	Inertie	Frottement
Fluide Réels	x	x	x	x
Fluide parfait	x	x	x	
Hydrostatique	x	x		

Tableau 2 : forces prises en compte pour divers degré d'abstraction

Alors que les fluides réels peuvent adopter toutes sortes de lois de comportement (Plastic, Bingham, Newtonien..), les fluides parfaits ont une viscosité nulle. Sur la Figure 5 ces fluides représentent donc l'axe des abscisses. Cependant, comme déjà discuté auparavant, un fluide n'est jamais réellement parfait.

En hydrostatique, les forces d'inertie sont nulles vu que le fluide est au repos, ce qui correspond au point origine du graphe de la Figure 5.

Chapitre 2 : Statique des fluides

Objectifs

- Pression dans le fluide
- Propriétés de la pression
- Applications
 - Forces appliquées sur des parois
 - Planes
 - Courbes
 - Pression d'Archimède
- Stabilité des corps

Table des matières

1	La pression au sein d'un fluide.....	15
1.1	Élément de fluide immobile	15
1.2	Équilibre du cube fluide.....	16
1.3	Efforts appliqués sur un corps solide	16
2	Equation fondamentale	17
2.1	Généralités.....	17
2.2	Conséquences directes.....	18
3	Applications de l'équation fondamentale	19
3.1	Mesure d'une pression par une colonne d'eau.....	19
3.2	Liquides superposés	19
3.3	Baromètre.....	20
3.4	Force de pression sur un corps solide	20
3.4.1	Force de pression indépendante du volume	20
3.4.2	Cas de la paroi plane	21
3.4.3	Cas de la paroi quelconque	23
3.4.4	Poussée d'Archimède	24
4	Stabilité des corps.....	27
4.1	Notion de stabilité	27
4.2	Stabilité des corps immergés.....	27
4.3	Stabilité des corps flottants	28

1. La pression

1.1 Élément de fluide immobile

Soit un réservoir d'eau dans lequel le fluide est supposé immobile.

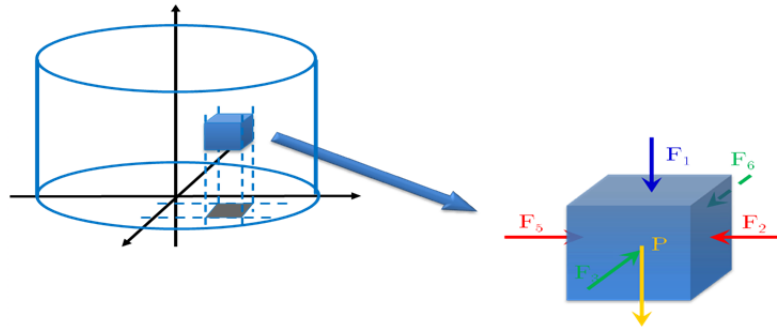


Figure 7 : volume de fluide immobile au sein d'un réservoir

Les forces agissant sur un volume de fluide au sein de ce réservoir sont :

- la force de gravité (poids du fluide) :

$$P = \text{masse} \times \text{gravité} = \rho V g \quad (2.1)$$

- les forces F_i sur les faces.

Autant la force de gravité P agit sur le volume, autant les forces F_i agissent sur les surfaces délimitant ce volume :

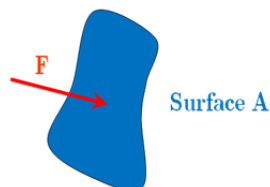


Figure 8 : force appliquée sur une surface

La pression p est le ratio de la force F et de la surface A sur laquelle elle agit :

$$p = \frac{F}{A} \quad [\text{Pa} \text{ ou } \text{N} / \text{m}^2] \quad (2.2)$$

Pour un cube infiniment petit, les deux seules forces agissant sur le cube de fluide immobile sont

- la gravité exprimée par (2.1) dans la direction verticale ;
- Le différentiel de pression sur deux faces parallèles, dans chaque direction de l'espace :

$$\Delta p \, dA = F_i - F_{i+3} \quad (2.3)$$

1.2 Équilibre du cube fluide

Le schéma rendu libre d'un élément de fluide défini par $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ est présenté sur la Figure 9.

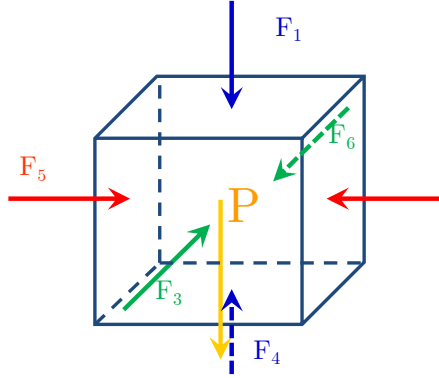


Figure 9 : schéma rendu libre d'un élément de fluide

Par équilibre dans les trois directions principales, il vient :

Equilibre selon l'axe x :

$$F_2 = F_5 \Leftrightarrow p_2 A = p_5 A \Leftrightarrow p_2 = p_5 \quad (2.4)$$

$$\frac{dp_x}{dx} = 0 \quad (2.5)$$

Equilibre selon l'axe y :

$$F_3 = F_6 \Leftrightarrow p_3 A = p_6 A \Leftrightarrow p_3 = p_6 \quad (2.6)$$

$$\frac{dp_y}{dy} = 0 \quad (2.7)$$

Equilibre selon l'axe z :

$$F_1 + P = F_4 \Leftrightarrow p_1 A + \rho g V = p_4 A \Leftrightarrow p_1 + \rho g \Delta z = p_4 \Leftrightarrow \frac{p_1 - p_4}{\Delta z} = -\rho g \quad (2.8)$$

En considérant l'élément comme infiniment petit :

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{p_1 - p_4}{\Delta z} = \frac{dp_z}{dz} = -\rho g \quad (2.9)$$

Ces trois dernières équations sont la base de la théorie concernant l'hydrostatique.

1.3 Efforts appliqués sur un corps solide

Si le fluide est immobile, les pressions élémentaires agissent toujours perpendiculairement à la paroi (pas de force de cisaillement).



Figure 10 : la pression est perpendiculaire aux parois

Cela a pour conséquence qu'en tout point du fluide la pression est identique dans toutes les directions. En effet, par équilibres successifs du trièdre, on a :

$$\begin{aligned}
 \text{Equilibre hor. : } & p_1 h = p L \sin \theta \\
 \text{Equilibre vert. : } & p_2 l = p L \cos \theta \\
 \text{Or } \cos \theta = \frac{l}{L} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{h}{L} \\
 \text{D'où } & p_1 L \sin \theta = p L \sin \theta \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 \\
 \text{Et } & p_2 L \cos \theta = p L \cos \theta \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{p}_2
 \end{aligned}$$

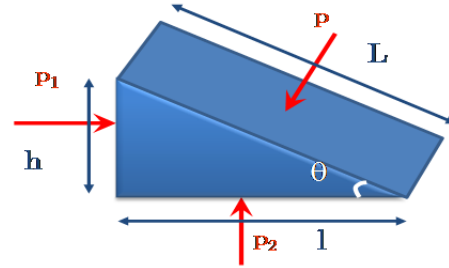


Figure 11 : pression identique dans toutes les directions

Ce résultat est d'une grande importance pour comprendre l'hydrostatique.

2. Equation fondamentale

1.4 Généralités

Comme vu dans la section précédente, au sein d'un fluide, la projection dans la direction verticale de forces agissant sur un élément de fluide donne :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \frac{dp_x}{dx} = \frac{dp_y}{dy} = 0 \quad (2.10)$$

En intégrant(2.10), il vient :

$$p^* = p + \rho g z = \text{terme de pression} + \text{terme de gravité} = \text{Cst} \quad (2.11)$$

- p = pression (Pa)
- ρ = masse volumique (kg/m^3)
- g = accélération de la pesanteur (m/s^2)
- z = hauteur au-dessus du niveau de référence horizontal (m)

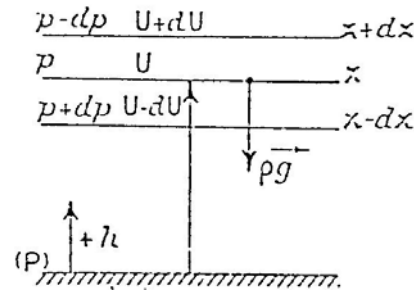
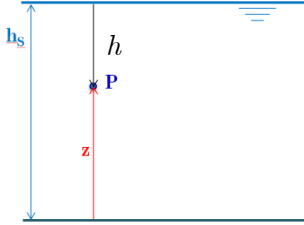


Figure 12 : pression et gravité

Étant donné (2.11), à la surface libre :

$$p^* = p_{atm} + \rho g h_S = \rho g h_S \quad (2.12)$$

De même, en tout point P situé au sein du fluide:



$$\begin{aligned} p^* &= p_P + \rho g z \\ \Leftrightarrow p_P &= p^* - \rho g z \\ \Leftrightarrow p_P &= \rho g h_S - \rho g z \\ \Leftrightarrow p_P &= \rho g (h_S - z) \end{aligned}$$

Figure 13 : pression en un point quelconque P

Ce qui donne finalement :

$$p_P = \rho g (h_S - z) = \rho g h \quad (2.13)$$

1.5 Conséquences directes

L'équation (2.11) exprime que dans un fluide au repos, le terme p^* est constant dans tout le fluide. Cela implique 4 résultats importants :

- 1) dans un fluide homogène, les surfaces d'égales pressions sont des plans horizontaux. En effet, si $p = \text{cte}$ alors $h = \text{cte}$
- 2) en présence de deux fluides de densités différentes, non miscibles :
 - a. la surface de séparation est un plan horizontal
 - b. le fluide le plus lourd (densité élevée) se trouve en dessous.
- 3) la différence de pression $p_A - p_B$ entre 2 points quelconques A et B ne dépend que de la distance verticale entre les 2 points et vaut

$$p_B - p_A = \rho g z \quad (2.14)$$

Exemple:

Si $p_A = 0$ alors $p_B = \rho g z$
 Si $p_A = p_{atm}$ alors $p_B = \rho g z + p_{atm}$

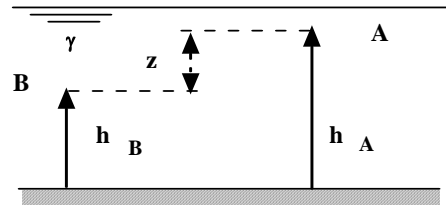


Figure 14 : différence de pression entre A et B

- 4) le principe de Pascal : Dans un fluide incompressible en équilibre, les pressions se transmettent intégralement. Si p_A varie, alors p_B varie simultanément de la même quantité.

3. Applications

1.6 Mesure d'une pression par une colonne d'eau

Étant donné l'équation (2.14), la pression au point M peut être facilement déduite de la hauteur de la colonne d'eau x , et ce quelle que soit la « forme de la colonne d'eau ».

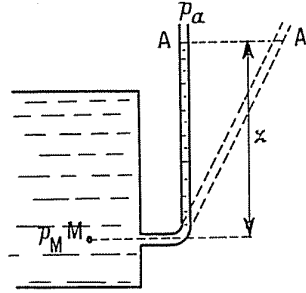


Figure 15 : mesure d'une pression par une colonne d'eau

C'est bien la hauteur « dans le plan vertical » qui compte.

1.7 Liquides superposés

Deux types de fluide de masses volumiques respectives ρ_1 et ρ_2 sont reliés par un tube.

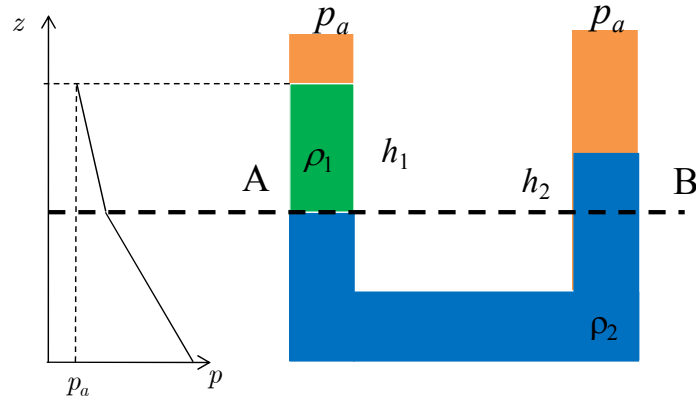


Figure 16 : liquides superposés

L'équation (2.11) permet d'écrire :

$$p_A + \rho_1 g h_1 = p_B + \rho_2 g h_2 \quad (2.15)$$

Cependant, étant donné que les points A et B sont sur la même horizontale, les pressions en ces points sont égales. Dès lors :

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \quad (2.16)$$

1.8 Baromètre

L'équation (2.11) permet également d'expliquer comment fonctionne un baromètre :

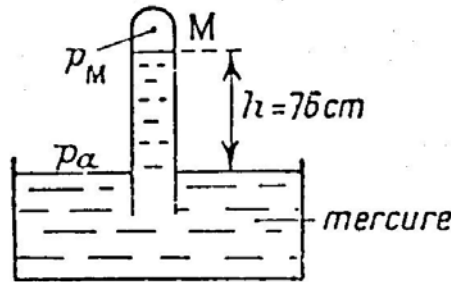


Figure 17 : schéma de fonctionnement simplifié d'un baromètre

La pression atmosphérique p_A est égale à la somme de la pression dans la poche d'air du baromètre (pression résiduelle dans le tube vide, pression nulle en théorie) et de la colonne de mercure dans le tube :

$$p_A = p_M + \rho_{Hg} g h_{Hg} \quad (2.17)$$

Il est alors facile de relier la hauteur de mercure à la pression atmosphérique.

1.9 Force de pression sur un corps solide

1.9.1 Force de pression indépendante du volume

Une autre conséquence de l'équation (2.11) est que la force sur une paroi dépend de la hauteur d'eau et non du volume.

Exemple des vases

Les trois vases ci-dessous sont remplis à la même hauteur d'eau. Ils possèdent des formes différentes mais la superficie du fond de chaque récipient est la même.

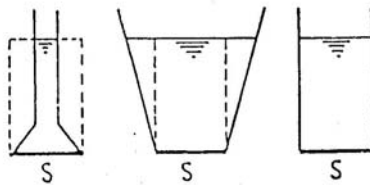


Figure 18 : hauteur d'eau identique dans trois vases

Ainsi, malgré que le volume d'eau soit différent dans chacun d'eux, la pression au fond est la même et la force appliquée également.

Exemple du Tonneau de Pascal

Le raisonnement est le même en ce qui concerne le Tonneau de Pascal. Il est possible de faire exploser le tonneau en utilisant un volume limité d'eau. En effet, le tonneau est rempli d'eau et un couvercle empêche l'eau de sortir. Une petite ouverture est pratiquée dans le tonneau et permet ainsi d'y insérer un tube.

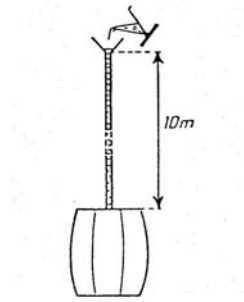


Figure 19 : Tonneau de Pascal

En remplissant le tube, on augmente la pression dans le tonneau jusqu'à explosion de celui-ci, en utilisant un volume d'eau d'autant plus restreint que la section du tube est petite.

1.9.2 Cas de la paroi plane

Dans cette section, les expressions de la force exercée par un volume de fluide sur une paroi plane ainsi que son point d'application sont établis.

Calcul de la force exercée par le fluide

En posant que la pression à la surface de l'eau est égale à la pression atmosphérique :

$$p_{\text{surface}} = p_{\text{atm}} \quad (2.18)$$

Et en prenant comme référence cette pression à la surface (pression relative), il vient :

$$p'_{\text{surface}} = 0 \quad (2.19)$$

Dans ces conditions :

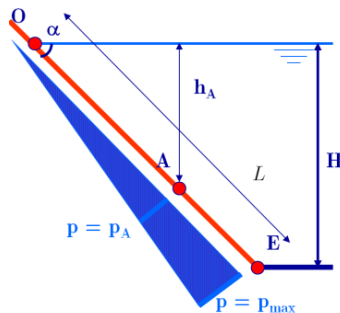


Figure 20 : paroi plane immergée

$$\Rightarrow p'_A = \rho g h_A \quad (2.20)$$

$$\Rightarrow p'_E = \rho g H = p'_{\text{max}} \quad (2.21)$$

Le calcul de la force totale F peut se déduire de deux manières. Une forme purement mathématique consiste à intégrer la pression le long de la paroi :

$$F = \int_0^E p \, dl = \int_0^E \rho g h \, dl = \int_0^E \rho g l \sin \alpha \, dl = \rho g \sin \alpha \frac{L^2}{2} \quad (2.22)$$

Une autre manière plutôt géométrique consiste à calculer l'aire du triangle de base L et de hauteur p_{\max} . En effet en repartant de (2.22)

$$F = \rho g \sin \alpha \frac{L^2}{2} \quad \text{et} \quad L \sin \alpha = H \quad (2.23)$$

$$F = \rho g H \frac{L}{2} = p_{\max} \cdot \frac{L}{2} \quad (2.24)$$

Cette formule donne de manière directe la force exercée par le fluide sur une paroi plane de longueur L .

Calcul du point d'application de F

Le point d'application de F est aussi appelé centre de poussé ou encore centre de gravité du triangle de pression.

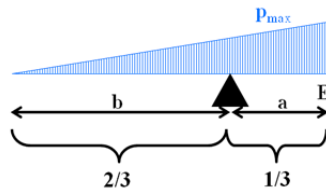


Figure 21 : détermination de la position du centre de poussé

Déterminer sa position consiste à réaliser un équilibre de moment.

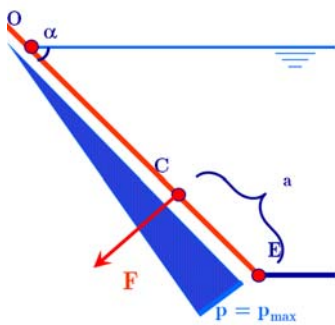


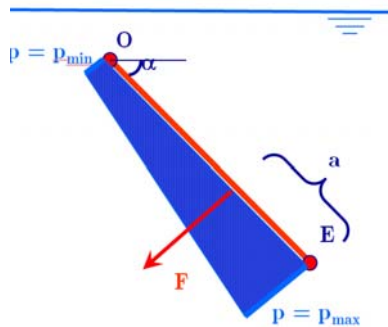
Figure 22 : détermination de la position du centre de poussée

$$\begin{aligned} \int_0^E p(x)(x-b) \, dx &= 0 \\ \Rightarrow \int_0^E p_{\max} \frac{x}{L}(x-b) \, dx &= 0 \\ \Rightarrow \left[\frac{x^3}{3L} - \frac{bx^2}{2L} \right]_0^E &= \frac{L^2}{3} - \frac{bL}{2} = 0 \\ \Rightarrow b &= \frac{2L}{3}; a = \frac{L}{3} \end{aligned}$$

Cas général de la paroi plane

Dans le cas envisagé précédemment, le point O était situé au point de référence de la pression (surface libre dans ce cas). La situation décrite ci-après présente le cas général où ce même point est situé à une certaine profondeur où le fluide exerce une pression p_{\min} .

En effectuant le même raisonnement que précédemment, il vient :



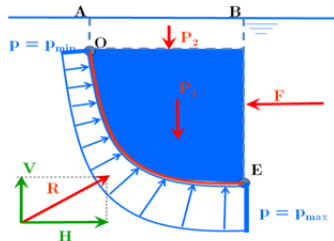
$$F = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2} L$$

$$a = \frac{L}{3} \left(\frac{2p_{\min} + p_{\max}}{p_{\min} + p_{\max}} \right)$$

Figure 23 : intensité et position de la résultante d'un trapèze de pression

1.9.3 Cas de la paroi quelconque

Les développements précédents sont généralisés à des parois quelconques. La configuration est la suivante :



Equilibre de OEBA :

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{F}$$

$$\Rightarrow \text{Hor. : } H = F$$

$$\Rightarrow \text{Vert. : } V = P_1 + P_2$$

Figure 24 : parois quelconque immergée

La composante horizontale de la résultante des forces de pressions est la résultante des pressions qui s'exercent sur la surface considérée projetée sur un plan vertical.

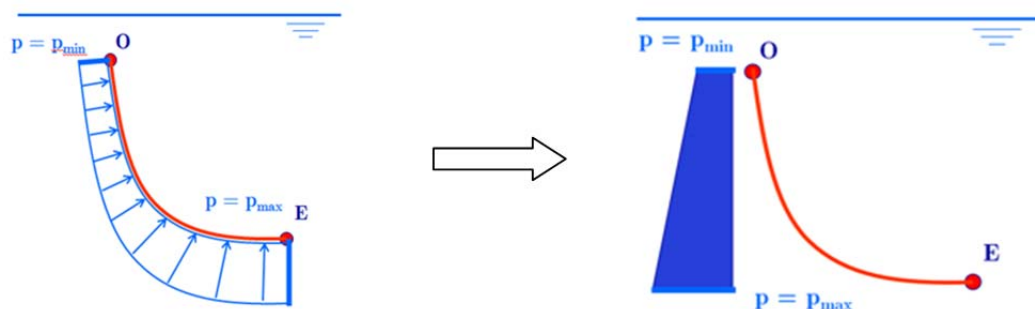


Figure 25 : Projection horizontale des forces de pression agissant sur la paroi

La composante verticale quant à elle vaut le poids du volume de fluide au dessus de la paroi :

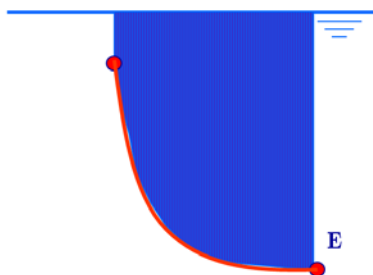


Figure 26 : projection verticale des forces de pression agissant sur la paroi

Cette manière de calculer les composantes horizontales et verticales reste bien sûr d'application pour les parois planes.

1.9.4 Poussée d'Archimède

Généralités

Le principe d'Archimède stipule que tout corps plongé dans un fluide subit une poussée:

- égale au poids du fluide « déplacé » (intérieur à la surface extérieure du corps)
- s'appliquant verticalement de bas en haut (pas de composante horizontale)
- s'appliquant au centre de gravité du volume de fluide limité par la surface externe du corps

Dans un premier temps, une vision plutôt intuitive du principe d'Archimède est présentée. Ensuite, la démonstration rigoureuse de l'expression de l'intensité ainsi que du point d'application de la poussée d'Archimède est exposée.

Vision intuitive du Principe d'Archimède

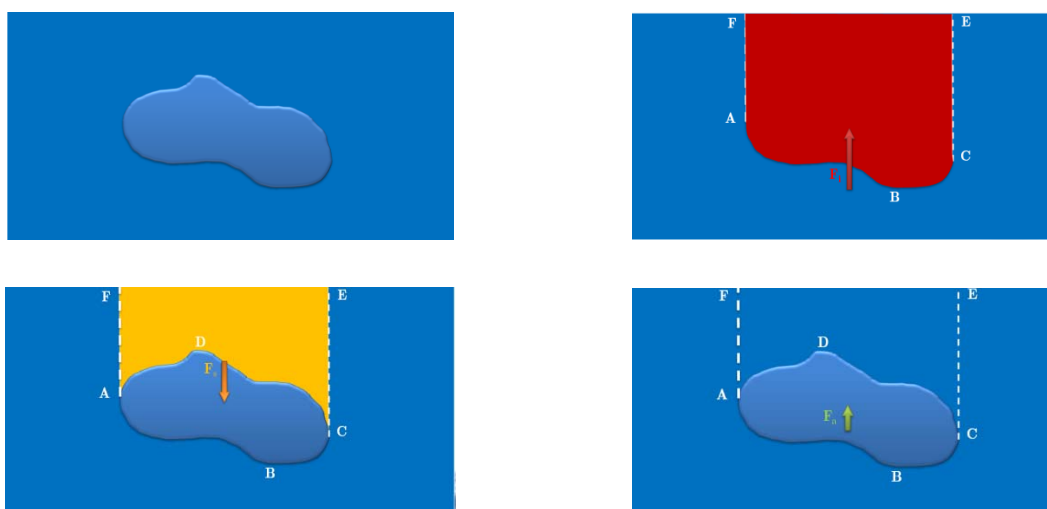


Figure 27 : Intensité de la poussée d'Archimède

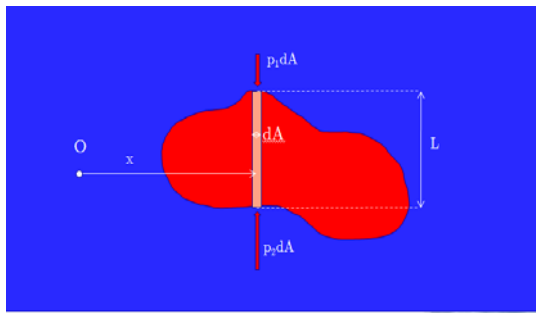
Soit F_i la force résultante des pressions sur ABC, la partie inférieure du corps. Elle vaut le poids du volume fluide situé au-dessus de ABC, soit ABCEFA. De même, F_s est la force résultante des pressions sur ADC, la partie supérieure du corps, soit le poids du volume fluide ADCEFA.

La force résultante totale vaut :

$$F_a = F_i - F_s = -\text{Poids du volume fluide ABCDA} \quad (2.25)$$

Ainsi, on trouve de manière intuitive et directe l'énoncé du principe d'Archimède.

Le point d'application est quant à lui trouvé par équilibre des moments. Il correspond à \bar{x} , le centre de gravité du volume déplacé :



$$\left. \begin{aligned} \gamma \int_V x dV &= \gamma \bar{x} V \\ dV &= L dA \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{V} \int_V x dV \quad (2.26)$$

Figure 28 : point d'application de la poussée d'Archimède

La poussée d'Archimède correspond donc bien au poids de fluide déplacé et s'applique au centre de gravité de ce dernier.

Démonstration du principe d'Archimède

Le principe d'Archimède est à présent démontré mathématiquement. Soit un volume quelconque V :

- délimité par une surface fermée S
- plongé entièrement dans un fluide de masse volumique ρ
- soumis à un champ de pesanteur uniforme g

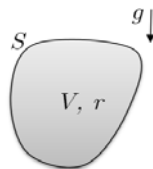


Figure 29 : volume de fluide

La résultante des forces de pression exercées sur le volume s'exprime par:

$$\vec{F} = \int_S -p \vec{n} dS \quad (2.27)$$

où

- dS est un élément infinitésimal de la surface considérée,
- \vec{n} désigne la normale à l'élément de surface, orientée par convention vers l'extérieur de cette surface

Afin de pouvoir appliquer le théorème de la divergence, de manière à transformer l'intégrale de surface en une intégrale de volume, un vecteur uniforme non nul \vec{r} est considéré. Comme \vec{r} est uniforme, il vient :

$$\vec{F} \cdot \vec{r} = \int_S -p \vec{n} dS \cdot \vec{r} = \int_S -p \vec{n} \cdot \vec{r} dS = \int_S -p \vec{r} \cdot \vec{n} dS \quad (2.28)$$

Selon le théorème de la divergence,

$$\vec{F} \cdot \vec{r} = - \int_V \nabla \cdot (p \vec{r}) dV \quad (2.29)$$

Or, en analyse vectorielle,

$$\nabla \cdot (p \vec{r}) = (\nabla p) \cdot \vec{r} + p (\nabla \cdot \vec{r}) \quad (2.30)$$

Et puisque \vec{r} est uniforme, on a

$$\nabla \cdot (p \vec{r}) = (\nabla p) \cdot \vec{r} \quad (2.31)$$

Par conséquent,

$$\vec{F} \cdot \vec{r} = - \int_V \nabla \cdot (p \vec{r}) dV = - \int_V (\nabla p) \cdot \vec{r} dV = - \int_V (\nabla p) dV \cdot \vec{r} \quad (2.32)$$

On en déduit donc que

$$\vec{F} = \int_V - (\nabla p) dV \quad (2.33)$$

Or d'après la loi fondamentale de la statique des fluides,

$$\nabla p = \rho \vec{g} \quad (2.34)$$

D'où

$$\vec{F} = \int_V - (\nabla p) dV = \int_V - \rho \vec{g} dV = - \left(\int_V \rho dV \right) \vec{g} = -M_{\text{fl}} \vec{g} \quad (2.35)$$

La résultante des forces de pression est donc égale en grandeur au poids du volume de fluide déplacé, mais orientée dans le sens contraire du poids, c'est-à-dire vers le haut.

Exemple du corps flottant

Par définition d'un corps flottant, une partie du corps est immergée dans le fluide alors que l'autre ne l'est pas.

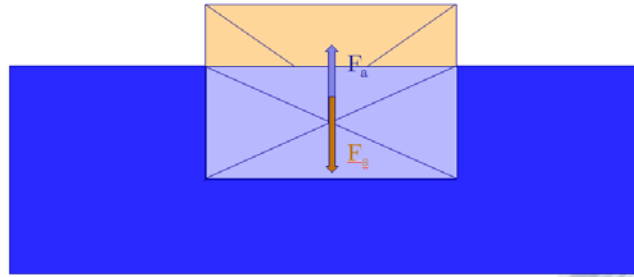


Figure 30 : exemple du corps flottant

Pour rappel, F_s est le poids du corps solide et F_a est la poussée d'Archimède. À l'équilibre ces deux forces sont égales. Deux scénarios sont envisagés:

- mouvement imposé vers le bas
- mouvement imposé vers le haut

Dans les deux cas, le poids du corps solide reste le même, alors que la poussée d'Archimède change. Dans le premier cas, elle augmente ce qui a pour effet de faire remonter le corps. Dans le deuxième cas, c'est l'inverse et le corps redescend.

4. Stabilité des corps

1.10 Notion de stabilité

Dans cette section, la notion de stabilité d'un corps plongé partiellement ou entièrement dans un fluide est définie. La distinction est faite entre :

- la stabilité « linéaire » : un faible déplacement dans une direction engendre une force opposée tendant à retrouver la position d'origine ;
- la stabilité « de rotation » : une faible rotation engendre une force opposée tendant à retrouver la position d'origine.

De plus la notion de stabilité conditionnelle ou inconditionnelle est abordée.

1.11 Stabilité des corps immergés

Dans les schémas qui suivent, le dégradé représente la variation de distribution de masse dans le corps. Ainsi, les zones les plus foncées sont plus denses.

Un corps totalement immergé est stable en rotation si son centre de gravité est en dessous du centre de poussée. Dans la première configuration, la masse du corps est concentrée dans sa partie inférieure. Le centre de poussée de la force d'Archimède est donc situé au-dessus du centre de gravité du corps. Une légère perturbation, introduite sous forme de rotation dans le

sens trigonométrique, a pour effet l'apparition d'un couple (F_a, F_s) qui ramène le corps dans sa position d'équilibre.

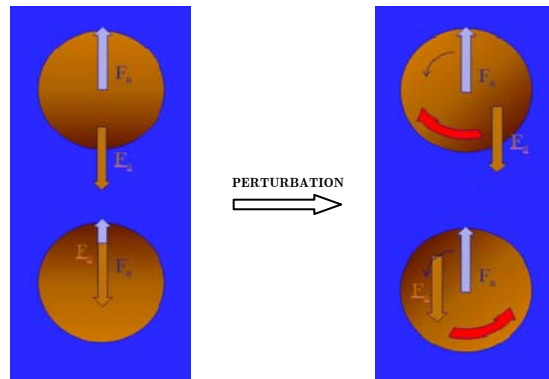


Figure 31 : stabilité des corps immergés

En ce qui concerne la deuxième configuration, la masse est cette fois-ci concentrée dans la partie supérieure du corps. La même perturbation aura pour effet d'amplifier le mouvement. Le corps est donc instable en rotation.

1.12 Stabilité des corps flottants

Un corps flottant est **inconditionnellement** stable en rotation si son centre de gravité est en-dessous du centre de poussée.

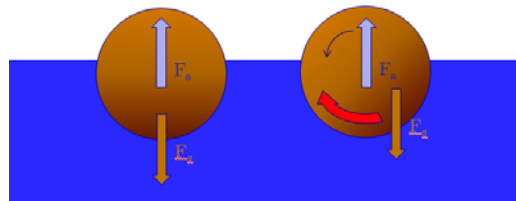


Figure 32 : corps flottant inconditionnellement stable

Comme pour le corps immergé stable, une perturbation engendrera une force de rappel. Par contre, un corps flottant est **conditionnellement** stable en rotation si son centre de gravité est au-dessus du centre de poussée.

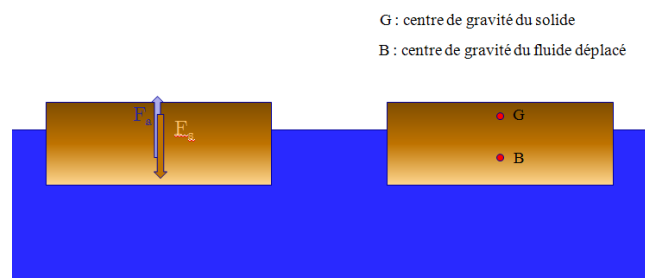


Figure 33 : stabilité des corps flottants

En effet, dans cette situation, une perturbation provoquera un couple qui aura tendance à déstabiliser encore plus le corps flottant. Cela ne veut pas dire que le corps soit instable dans tous les cas. Tout dépend de la situation du métacentre vis-à-vis du centre de gravité.

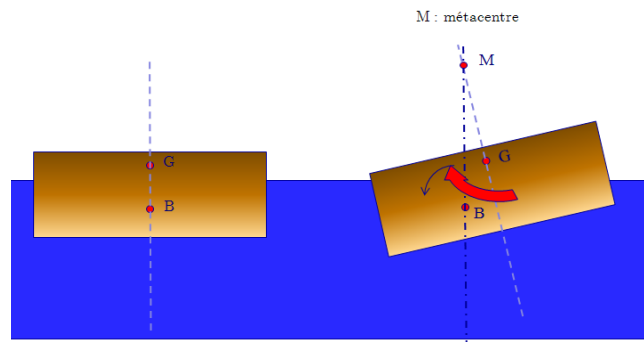


Figure 34 : stabilité des corps flottants et métacentre

Le métacentre est le point d'intersection de l'axe longitudinal d'un navire (ou plan longitudinal) passant par le centre de gravité et de la verticale passant par le centre de poussée, lorsque le navire est incliné.

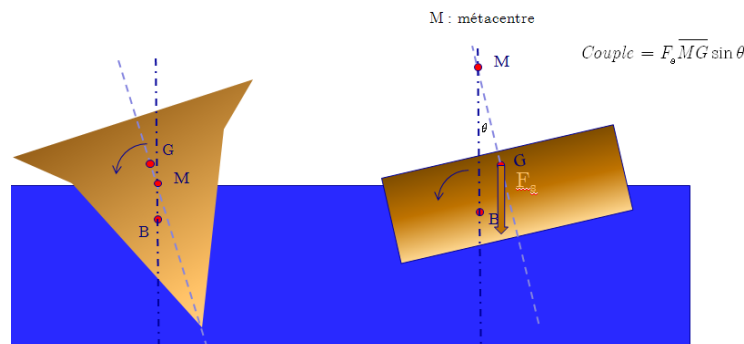


Figure 35 : stabilité des corps flottants et métacentre

Un corps flottant est alors **stable** en rotation si son métacentre est au dessus du centre de gravité tandis qu'il est instable dans le cas contraire.

Chapitre 3 : Etablissement des équations

Objectifs

- Étude de la conservation d'une grandeur sur un volume de contrôle
- Énoncé des deux premiers principes de conservation (masse et quantité de mouvement).
- Bernoulli selon une ligne de courant : Établissement du principe et exemple d'application.
- Troisième principe fondamental : conservation de l'énergie
- Mouvement et déformations d'une particule fluide
 - Définition du mouvement de rotation
 - Taux de déformation – liaison aux tensions visqueuses
- Formulation des équations de Navier-Stokes
- Équations d'Euler
 - Conservative et non conservative
 - Formulations alternatives
 - Fermeture du système

Table des matières

1	Notion de base : dérivée particulaire.....	35
2	Conservation d'une grandeur pour un volume particulaire.....	35
2.1	Introduction.....	35
2.2	Théorème de transport de Reynolds.....	36
2.2.1	Première approche.....	37
2.2.2	Deuxième approche.....	40
3	Principes de conservation.....	41
3.1	Conservation de la masse.....	41
3.2	Conservation de la quantité de mouvement.....	42
3.3	Forme différentielle des deux principes de conservation.....	45
3.4	Fluide incompressible.....	46
4	Loi de Bernoulli selon une ligne de courant.....	47
4.1	Méthodologie.....	47
4.2	Démonstration.....	48
4.3	Exemple d'application.....	50
4.3.1	Effet Venturi.....	50
4.3.2	Siphon.....	51
4.3.3	Cavitation.....	53
5	Conservation de l'énergie.....	54
5.1	Formalisme.....	54
5.2	Conservation de l'énergie et principe de Bernoulli.....	56
6	Expression de la rotation d'une particule fluide.....	56
6.1	Rotation d'un corps solide vs. rotation d'une particule fluide.....	56
6.2	Vitesse angulaire d'une particule fluide.....	58
6.3	Description du champ vectoriel tourbillonnaire.....	59
6.4	Théorèmes et loi de Helmholtz.....	60

6.4.1	Cas particulier : fil tourbillonnaire rectiligne	61
6.4.2	Surface libre d'un tourbillon d'eau.....	61
7	Expressions des tensions visqueuses	63
7.1	Tenseur des taux de déformation 3D	64
7.2	Généralisation de la relation contraintes-taux de déformation	67
8	Équations de Navier-Stokes.....	69
9	Equations d'Euler.....	70
9.1	Formulations conservative et non conservative.....	70
9.2	Formulations alternatives	71
9.3	Fermeture du système.....	72

1 Notion de base : dérivée particulaire

Dans cette section, le taux de variation total d'une fonction ou propriété $F = F(x, y, z, t)$ est étudié. La différentielle totale de F est donnée par

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \quad (3.1)$$

D'où la dérivée totale par rapport au temps le long d'une trajectoire quelconque \vec{r} :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla F \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (3.2)$$

Si \vec{r} est interprété comme une trajectoire d'une particule, \vec{X} , identifiée par ses coordonnées \vec{X}_0 (constante) et dépendant uniquement du temps t , il vient :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{U} \quad (3.3)$$

avec \vec{U} la vitesse de la particule. La dérivée totale de F peut être écrite sous la forme

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{U} \cdot (\nabla F) \quad (3.4)$$

Ce type de dérivée s'appelle une dérivée particulaire. Elle est désignée par :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot (\nabla) \quad (3.5)$$

et est traitée comme un opérateur différentiel applicable sur une fonction scalaire ou vectorielle. Ainsi cette dérivée est distinguée du symbole d/dt réservé à la désignation de la dérivée par rapport au temps d'une fonction qui dépend de la seule variable t .

2 Conservation d'une grandeur pour un volume particulaire

2.1 Introduction

Pour rappel, il existe deux méthodes pour décrire mathématiquement un écoulement :

- la méthode Lagrangienne qui s'intéresse à la trajectoire d'une particule donnée ;
- la méthode Eulérienne qui s'intéresse aux variations de propriétés en un lieu (ou volume de contrôle) dans l'écoulement.

En mécanique du solide, l'approche Lagrangienne est privilégiée. Dans cette approche les équations de base sont dérivées pour une masse donnée⁷.

⁷ Cette approche est similaire à l'approche « système fermé » en thermodynamique.

Dans la Figure 36, le solide modifie sa position au cours du temps sans changer de masse. De plus, au sein de ce volume solide, les particules n'ont pas changé de positions relatives. Le mouvement global peut donc être caractérisé par le déplacement du centre de gravité du solide et des mouvements de masse autour de lui.

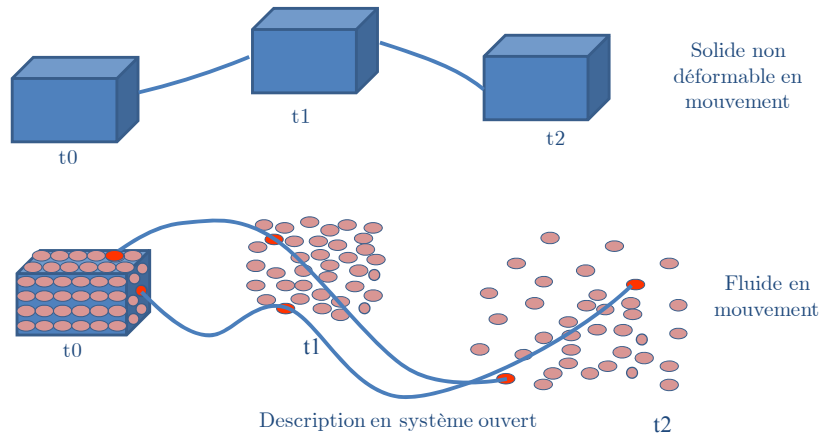


Figure 36 : Comparaison du mouvement d'un solide et d'un ensemble de particules

Soient une série de petites particules fluides dont la configuration d'ensemble *initiale* est identique à celle de l'exemple précédent. Une fois cet amas de particules en mouvement, leur disposition devient rapidement complexe. Les particules s'éloignent et se mélangent à d'autres particules. Dans ce cas complexe, il n'est pas aisé (et souvent superflu) d'obtenir les trajectoires et les positions relatives des particules au cours du temps.

Pour cette raison, la méthode d'Euler est souvent plus adéquate. Au lieu de suivre une particule le long de sa trajectoire, l'étude est concentrée sur un *lieu donné de l'espace*. À chaque instant des particules différentes passent par le lieu considéré où les variations temporelles des inconnues du problème (vitesse, pression, ...) sont évaluées.

Il est utile de rappeler que les principes fondamentaux de la mécanique s'appliquent à des particules (Lagrangien). Toutefois, une relation entre les équations appliquées à un système de particules (Lagrange) et les équations appliquées à un volume de contrôle fixe quelconque (Euler) peut être formulée. Cette relation porte le nom de *théorème de transport de Reynolds*.

2.2 Théorème de transport de Reynolds

Soit V un volume mobile quelconque enserrant en tout temps un ensemble bien identifié de particules fluides. Le symbole Φ désigne une propriété extensive quelconque et ϕ la propriété intensive associée :

$$\Phi = \int_V \phi dV \quad (3.6)$$

La variation au cours du temps de Φ caractérisant l'ensemble des particules est donnée par:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi_{syst,t+\Delta t} - \Phi_{syst,t}}{\Delta t} \triangleq \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.7)$$

Deux approches sont possibles pour déterminer ce que devient la variation de l'ensemble de ces particules au cours du temps dans une vision Eulérienne.

2.2.1 Première approche

La Figure 37 représente au temps t :

- un système fermé de particules (traits continus) ;
- un volume de contrôle ouvert enserrant initialement le système (traits discontinus) ;
- un champ de vitesse (ligne continues avec une flèche).

Il est à noter que de manière générale, le volume de contrôle peut être considéré comme arbitraire et ne correspond donc pas nécessairement aux frontières du système.

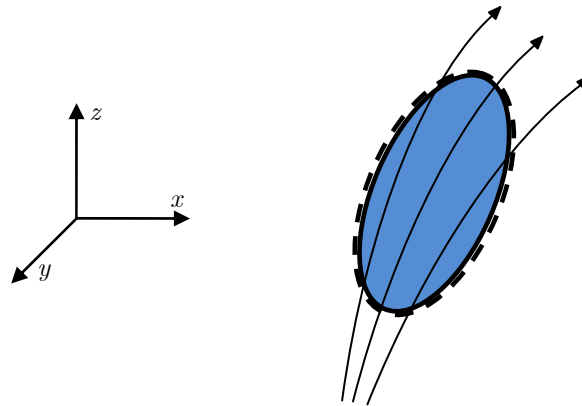


Figure 37 : Système, volume de contrôle et champ de vitesse à l'instant initial

La Figure 38 représente le système au temps $t + \Delta t$. Ce dernier a évolué en accord avec le champ de vitesse.

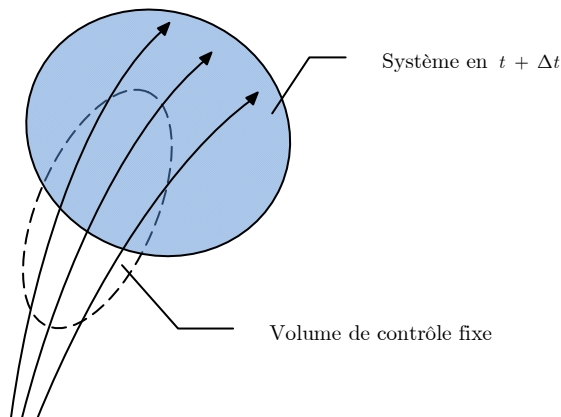


Figure 38: système au temps t (en foncé) et système au temps $t + \Delta t$ (en clair)

La Figure 39 décompose l'espace en fonction des différentes positions du système au cours du temps :

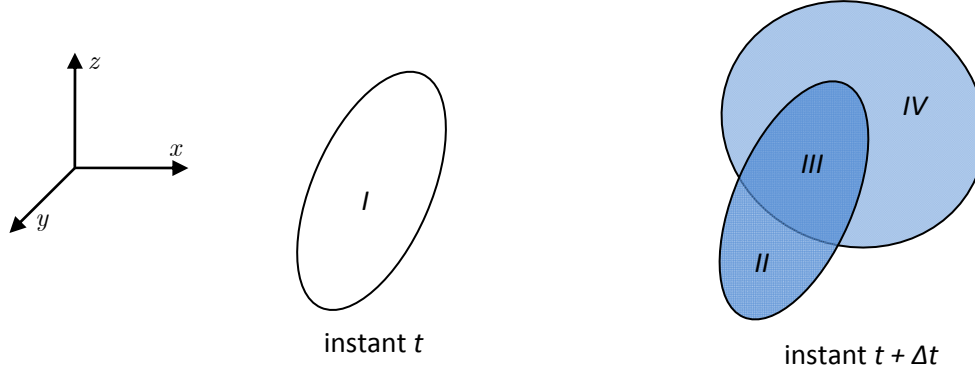


Figure 39 : évolution du système

Au temps t , le volume I représente entièrement le système. Au temps $t + \Delta t$, ce dernier s'est déplacé et déformé. Il est alors subdivisé en deux volumes : III et IV .

Le volume II représente la portion du volume initial I qui n'est plus occupée par le système au temps $t + \Delta t$. En tenant compte des précédentes considérations, il vient:

$$\Phi_{syst,t+\Delta t} - \Phi_{syst,t} = \left(\int_{III} \phi dV + \int_{IV} \phi dV \right)_{t+\Delta t} - \left(\int_I \phi dV \right)_t \quad (3.8)$$

$$\Phi_{syst,t+\Delta t} - \Phi_{syst,t} = \left(\int_{III} \phi dV + \int_{IV} \phi dV \right)_{t+\Delta t} - \left(\int_I \phi dV \right)_t + \left(\int_{II} \phi dV \right)_{t+\Delta t} - \left(\int_{II} \phi dV \right)_{t+\Delta t} \quad (3.9)$$

En divisant le tout par Δt et en réarrangeant les termes :

$$\frac{\Phi_{syst,t+\Delta t} - \Phi_{syst,t}}{\Delta t} = \frac{\left(\int_{III} \phi dV + \int_{IV} \phi dV \right)_{t+\Delta t} - \left(\int_I \phi dV \right)_t}{\Delta t} + \frac{\left(\int_{IV} \phi dV \right)_{t+\Delta t}}{\Delta t} - \frac{\left(\int_{II} \phi dV \right)_{t+\Delta t}}{\Delta t} \quad (3.10)$$

Pour Δt tendant vers 0, le premier terme devient

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left(\int_{III} \phi dV + \int_{IV} \phi dV \right)_{t+\Delta t} - \left(\int_I \phi dV \right)_t}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{volume de contrôle figé}} \phi dV \quad (3.11)$$

Cette équation représente un bilan temporel de la propriété comparée sur un ensemble de points identiques⁸, donc occupé par des particules différentes au cours du temps. C'est bien là la définition d'une dérivée partielle temporelle.

⁸ En effet, le volume I au temps t équivaut aux volumes II et III au temps $t + \Delta t$

Les intégrales sur II et IV , en $t+\Delta t$, peuvent être associées à des flux. En effet si Δt tend vers 0, alors les volumes II et IV peuvent être considérés comme l'intégrale des flux sur le pas Δt à travers les surfaces d'échange :

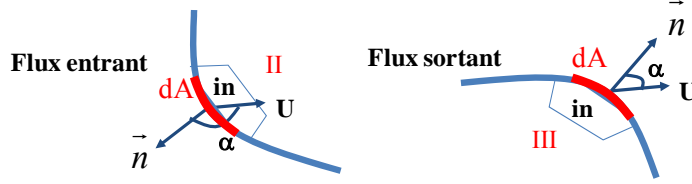


Figure 40 : flux aux frontières

Dans ce cas, il vient:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left(\int_{IV} \phi dV \right)_{t+\Delta t}}{\Delta t} &= \int_{\text{Surface sortante}} \text{Flux}_{\text{sortant}} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left(\int_{II} \phi dV \right)_{t+\Delta t}}{\Delta t} &= \int_{\text{Surface entrante}} \text{Flux}_{\text{entrant}} \end{aligned} \right\} = \int_{\text{surface de contrôle du volume figé}} (\phi \vec{U}) \cdot \vec{n} dA \quad (3.12)$$

car

$$\text{Flux}_{dS} = (\phi \vec{U}) \cdot \vec{n} dA \quad (3.13)$$

L'équation (3.10) de départ se transforme, (3.11) et (3.12), en :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{volume de contrôle figé}} \phi dV + \int_{\text{surface de contrôle du volume figé}} \phi \vec{U} \cdot \vec{n} dA \quad (3.14)$$

D'une part, le volume d'intégration est figé (indépendant de t). D'autre part, l'intégrand ne dépend que de t . La dérivée partielle temporelle peut donc être placée sous l'intégrale.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{V \text{ figé}} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{A \text{ figé}} (\phi \vec{U}) \cdot \vec{n} dA \quad (3.15)$$

En appliquant le théorème de la divergence de Green⁹:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{V \text{ figé}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \vec{U}) \right) dV \quad (3.16)$$

Cette équation s'appelle le **théorème de transport de Reynolds**. Il est écrit ici sous sa forme **conservative** puisque toutes les dérivées spatiales dépendent de l'inconnue conservative ϕ .

⁹ $\int_V \frac{\partial \sigma_k}{\partial x_k} dV = \int_V \nabla \cdot \vec{\sigma} dV = \int_A (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) dA = \int_A \sigma_i n_i dA$ le \vec{n} désigne la normale à A.

Remarque : le théorème de transport de Reynolds peut également être réécrit sous une autre forme. En effet, en exploitant la définition de la dérivée particulaire et sachant que la divergence du produit d'un scalaire et d'un vecteur peut être développée comme suit :

$$\nabla \cdot (a \vec{B}) = a (\nabla \cdot \vec{B}) + \vec{B} \cdot \nabla a \quad (3.17)$$

il vient:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{V \text{ figé}} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi (\nabla \cdot \vec{U}) \right) dV \quad (3.18)$$

Il est écrit ici sous sa forme **non conservative** puisque certaines dérivées spatiales ne dépendent pas de l'inconnue conservative ϕ .

2.2.2 Deuxième approche

Le volume se modifiant dans le temps et l'espace :

$$\frac{d}{dt} \int_V \phi dV = \int_V \left(\frac{D\phi}{Dt} dV + \phi \frac{D}{Dt} dV \right) \quad (3.19)$$

En supposant de manière « peu rigoureuse » l'intégrale comme une somme de termes, il faut ainsi :

- détailler la dérivée particulaire spécifique à l'intérieur d'un volume quelconque d'intégration avant d'intégrer ;
- apporter une correction tenant compte des modifications particulières de ce volume.

A l'instant t , le volume V est lié au volume initial V_0 occupé par les mêmes particules dans la configuration de référence :

$$dV = J dV_0 \quad (3.20)$$

où J désigne le Jacobien de la transformation faisant passer de la configuration de référence à la configuration actuelle. Dès lors, la dérivée particulaire du volume dV devient :

$$\frac{D}{Dt} dV = \frac{DJ}{Dt} dV_0 = \frac{DJ(\vec{X}, t)}{Dt} dV_0 = \frac{DJ}{J} dV \quad (3.21)$$

Le coefficient de proportionnalité entre dV et $\frac{D}{Dt} dV$ ne dépend pas de sa forme mais seulement des coordonnées du point de calcul.

Soit initialement un volume unitaire formé des trois vecteurs directeurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ d'un trièdre cartésien, dV est alors égal au produit mixte (déterminant) de ces vecteurs :

$$dV = \left| \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right| = \left(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \right) \cdot \vec{e}_3 = \left(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 \right) \cdot \vec{e}_2 = \left(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \right) \cdot \vec{e}_1 = 1 \quad (3.22)$$

Dès lors, la dérivée particulaire du volume dV devient :

$$\frac{D}{Dt} dV = \left| \frac{D}{Dt} \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right| + \left| \vec{e}_1, \frac{D}{Dt} \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right| + \left| \vec{e}_1, \vec{e}_2, \frac{D}{Dt} \vec{e}_3 \right| \quad (3.23)$$

Compte-tenu que :

$$\vec{e}_i = \left(\vec{X}_i + d\vec{X}_i \right) - \vec{X}_i \quad (3.24)$$

Avec $\vec{X}_i = \vec{X}_i(x, y, z)$, il vient :

$$\frac{D}{Dt} \vec{e}_i = \frac{D}{Dt} \left(\vec{X}_i + d\vec{X}_i \right) - \frac{D}{Dt} \vec{X}_i = \vec{U} \left(\vec{X}_i + d\vec{X}_i, t \right) - \vec{U} \left(\vec{X}_i, t \right) = \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} \quad (3.25)$$

$$\frac{D}{Dt} dV = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 & 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 & 1 & \frac{\partial v}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \nabla \cdot \vec{U} \quad (3.26)$$

En généralisant à un volume quelconque, compte tenu que, dans (3.26), le volume est unitaire, (3.21) s'exprime finalement comme :

$$\frac{D}{Dt} dV = \nabla \cdot \vec{U} dV \quad (3.27)$$

et (3.19) s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_V \phi dV = \int_V \left[\frac{D\phi}{Dt} + \phi \nabla \cdot \vec{U} \right] dV \quad (3.28)$$

qui est bien identique à (3.18).

3 Principes de conservation

3.1 Conservation de la masse

Lavoisier écrivit dans son *Traité élémentaire de chimie* (1789), p. 101 :

« ... car rien ne se crée, ni dans les opérations de l'art, ni dans celles de la nature, et l'on peut poser en principe que, dans toute opération, il y a une égale quantité de matière avant et après l'opération ; que la qualité et la quantité des principes est la même, et qu'il n'y a que des changements, des modifications. »



Figure 41 : Lavoisier

Cet extrait d'un ouvrage de Lavoisier se résume par une autre de ses célèbres citations,

« Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme »

Ce principe, simple en apparence, est d'une importance fondamentale (entre autres) en mécanique des fluides et en constitue l'un des piliers fondateurs. Ce principe de « continuité » ou de « conservation de la masse » peut être aisément traduit en équation.

Soit V un volume quelconque enserrant un ensemble bien identifié de particules fluides. En l'absence de création ou de destruction de matière, la variation temporelle de masse de ce volume est nulle :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (3.29)$$

En appliquant (3.16), il vient :

$$\frac{dm}{dt} = \int_{V_{figé}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) dV \quad (3.30)$$

Ou encore

$$\frac{dm}{dt} = \int_{V_{figé}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) \right] dV = 0 \quad (3.31)$$

3.2 Conservation de la quantité de mouvement

Dans son livre *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), Newton écrit :

« Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état. »

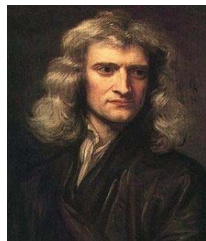


Figure 42 : Newton

Ce principe est connu sous le nom du « Principe de conservation de la quantité de mouvement¹⁰ ». Cette loi définit un repère inertiel (ou galiléen). De plus, toujours dans le même ouvrage :

« Soit un corps de masse m (constante) : l'accélération subie par un corps dans un référentiel galiléen est proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse m . »

Ce principe se traduit en équation comme suit :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{U} dV = \sum_i \vec{F}_i \quad (3.32)$$

Pour un volume particulière, (3.32) peut être écrit de la manière suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{U} dV = \int_V \rho \vec{F} dV + \int_A (\vec{T} \cdot \vec{n}) dA \quad (3.33)$$

Avec

- \vec{F} les forces de volume incluant (gravité, centrifuge, de Coriolis et électromagnétiques)
- \vec{T} le tenseur des forces de surface (pression, tensions visqueuses)

En transformant l'intégrale de surface en intégrale de volume, il vient :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{U} dV = \int_V \rho \vec{F} dV + \int_V \nabla \cdot \vec{T} dV \quad (3.34)$$

Et en appliquant (3.16) :

$$\int_{V \text{ figé}} \left[\frac{\partial (\rho \vec{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) \right] dV = \int_{V \text{ figé}} \rho \vec{F} dV + \int_{V \text{ figé}} \nabla \cdot \vec{T} dV \quad (3.35)$$

Les forces de surface en un point à l'intérieur d'un fluide en mouvement sont représentées par les contraintes tangentielles τ et les contraintes normales σ . Au total, neuf composantes associées à ce point permettent d'y décrire l'état de contrainte. Ces dernières peuvent être écrites sous forme d'un tenseur appelé tenseur des contraintes :

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Les composantes de \vec{T} constituent bien un tenseur puisque leurs expressions dans différents repères vérifient de façon univoque selon la règle de transformation des tenseurs.

¹⁰ La quantité de mouvement d'un corps est définie comme le produit de sa masse par sa vitesse.

De plus ce tenseur est symétrique. En effet toutes les contraintes tangentielles sont égales deux à deux : $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Cela est démontrable par application du théorème des moments cinétiques, bien connu dans la dynamique du solide, à une particule fluide :

$$\vec{M} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{U}) \quad (3.37)$$

L'expression entre parenthèse représente le moment cinétique de la particule en question. Cette loi énonce que le taux de variation total du moment de quantité de mouvement d'une particule de fluide est égal au moment \vec{M} des forces externes qui exercent une influence ou une action sur la particule.

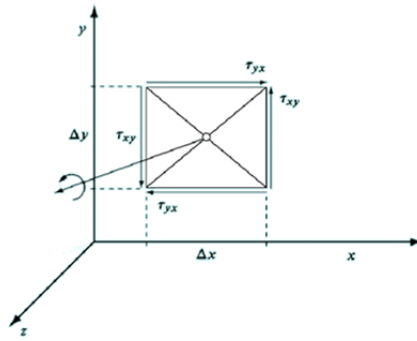


Figure 43 Evaluation du couple M_z

L'application de (3.37) à une particule de fluide, par exemple bidimensionnelle, rectangulaire et de hauteur unitaire (Figure 43) donne :

$$M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} \quad (3.38)$$

où J_z représente le moment d'inertie de la particule par rapport à l'axe traversant le centre de gravité selon la normale au plan x - y :

$$J_z = m \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{12}, m = \rho \Delta x \Delta y \quad (3.39)$$

Étant donné la Figure 43, il vient :

$$M_z = -2\tau_{yx} \Delta x \frac{\Delta y}{2}(1) + 2\tau_{xy} \Delta y \frac{\Delta x}{2}(1) \quad (3.40)$$

Puisque $d\omega / dt$ doit avoir une valeur finie, il apparaît que le membre de droite de (3.38) a un ordre de grandeur inférieur par rapport à celui du moment des forces surfaciques lorsque $\Delta x \Delta y \rightarrow 0$. Dans ce cas, (3.40) donne :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.41)$$

Dans un fluide au repos les contraintes tangentielles disparaissent et chacune des contraintes normales est exactement égale et opposée en signe à la pression hydrostatique p . Par conséquent

la pression p est dirigée en sens contraire à la contrainte normale à une surface imaginaire définie dans le fluide. Pour cette raison il est d'usage d'écrire $\overline{\overline{T}}$ sous la forme

$$\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \quad (3.42)$$

où $\overline{\overline{I}}$ est le tenseur unitaire et $\overline{\overline{\tau}}$ est appelé le tenseur *déviateur* :

$$\overline{\overline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} + p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} + p \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Ce dernier prend uniquement en compte les effets dus aux tensions internes ou à la viscosité du fluide. De ce fait, pour un écoulement idéal (sans frottement interne) ou pour un fluide au repos, toutes les composantes de (3.43) sont nulles. Le tenseur $\overline{\overline{T}}$ se réduit alors à :

$$\overline{\overline{T}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Finalement, en tenant compte de (3.42), l'équation de conservation de la quantité de mouvement (3.35) peut être réécrite :

$$\int_{V_{\text{figé}}} \left[\frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) \right] dV = \int_{V_{\text{figé}}} \left[\rho \vec{F} + \nabla \cdot (\overline{\overline{\tau}} - p\overline{\overline{I}}) \right] dV \quad (3.45)$$

3.3 Forme différentielle des deux principes de conservation

En résumé, les deux principes de conservation s'expriment sous la forme suivante pour un milieu supposé continu :

Principe de conservation de la masse (ou principe de continuité) :

$$\int_{V_{\text{figé}}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) \right] dV = 0 \quad (3.46)$$

Principe de conservation de la quantité de mouvement :

$$\int_{V_{\text{figé}}} \left[\frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) - \rho \vec{F} - \nabla \cdot (\overline{\overline{\tau}} - p\overline{\overline{I}}) \right] dV = 0 \quad (3.47)$$

Cette écriture constitue la forme intégrale des deux premiers principes. Etant donné que V est arbitraire, les intégrands doivent vérifier les relations :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) - \rho \vec{F} - \nabla \cdot (\overline{\overline{\tau}} - p\overline{\overline{I}}) = 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

L'équivalent de (3.48) en notation indicielle est :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{cases} \quad \text{pour } i, j = x, y, z \quad (3.49)$$

3.4 Fluide incompressible

En considérant (3.17), l'équation de la conservation de la masse peut être reformulée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho (\nabla \cdot \vec{U}) + (\vec{U} \cdot \nabla) \rho &= 0 \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho (\nabla \cdot \vec{U}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

L'hypothèse d'incompressibilité implique que la masse volumique de chaque particule ne change pas durant son mouvement :

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (3.51)$$

L'équation de conservation de la masse peut, dans le cas d'un fluide incompressible, se restreindre à¹¹ :

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (3.52)$$

Il n'est donc pas nécessaire que toutes les particules aient la *même* densité. Cependant, si le fluide est homogène et incompressible :

$$\rho = Cste \quad (3.53)$$

Si le fluide est homogène (respectivement hétérogène) à un instant initial, il restera homogène (respectivement hétérogène).

Compte tenu des développements précédents, la conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \vec{U}) = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\vec{\tau} - p \vec{I}) \quad (3.54)$$

¹¹ Un champ vectoriel à divergence nulle est dit solénoïdal. Le champ de vitesse d'un fluide incompressible est à divergence nulle. Il est donc solénoïdal.

Le système formé par (3.52) et (3.54) contient 4 équations en les 4 inconnues \vec{U} et p . Il s'agit donc d'un système fermé, à condition de disposer d'une relation constitutive pour τ .

Sous cette forme, l'écriture est dite **conservative**. Le terme convectif peut cependant être développé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\vec{U} \vec{U}) &= \vec{U} \left(\underbrace{\nabla \cdot \vec{U}}_{=0} \right) + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) &= u_i \underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{=0} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\end{aligned}\quad (3.55)$$

Le système d'équations (3.48) se résume alors à :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{U} = 0 \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} - \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\tau - p \vec{I}) = 0 \end{cases} \quad (3.56)$$

Respectivement, (3.49) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{cases} \quad (3.57)$$

qui est l'expression **non conservative**, utile dans certains cas pratique d'études de systèmes.

4 Loi de Bernoulli selon une ligne de courant

4.1 Méthodologie

En partant du système d'équations (3.57), le principe de Bernoulli le long d'une ligne de courant peut être déduit. La méthode suivie est la suivante :

- considérer comme seule force extérieure la gravité ;
- multiplier chaque équation de conservation de quantité de mouvement selon x_i par la composante de vitesse correspondante u_i ;
- sommer les 3 équations ;
- utiliser la définition de la norme de la vitesse pour en tirer une expression le long d'une ligne de courant ;
- intégrer l'expression ainsi simplifiée le long de cette ligne de courant.

4.2 Démonstration

Dans le système(3.57), seule la gravité est considérée :

$$\vec{F} = \vec{g} \quad (3.58)$$

Chaque équation de conservation de quantité de mouvement selon x_i est alors multipliée par la composante de vitesse correspondante u_k .

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) u_k = \left(g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) u_k \quad (3.59)$$

La sommation des trois équations est obtenue immédiatement par l'utilisation de la convention sur les indices répétés en remplaçant u_k par u_i .

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) u_i = \left(g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) u_i \quad (3.60)$$

En considérant en outre la définition de la norme de la vitesse $\|\vec{U}\| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \right) + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \right) = g_i u_i - u_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} u_i \quad (3.61)$$

De plus, si le fluide est homogène, les termes représentant les forces de surface deviennent :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tau_{ij}}{\rho} \right) \quad (3.62)$$

En substituant (3.62) dans (3.61) :

$$\|\vec{U}\| \frac{\partial \|\vec{U}\|}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \right) = g_i u_i - u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tau_{ij}}{\rho} \right) u_i \quad (3.63)$$

Les composantes du vecteur unitaire tangent au vecteur vitesse instantanée sont notées s_i :

$$s_i = \frac{u_i}{\|\vec{U}\|} \quad (3.64)$$

En divisant (3.63) par $\|\vec{U}\|$ il vient:

$$\frac{\partial \|\vec{U}\|}{\partial t} + s_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \right) = g_i s_i - s_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} \right) + s_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tau_{ij}}{\rho} \right) \quad (3.65)$$

Cette expression est indépendante du système d'axe. Cependant, la gravité étant verticale, axe Z , son expression vectorielle peut s'exprimer de façon générale comme :

$$\vec{g}_{x'} = \vec{g} \sin \alpha = -g \frac{\partial Z}{\partial x'} \quad (3.66)$$

$$\vec{g}_{z'} = \vec{g} \cos \alpha = -g \frac{\partial Z}{\partial z'} \quad (3.67)$$

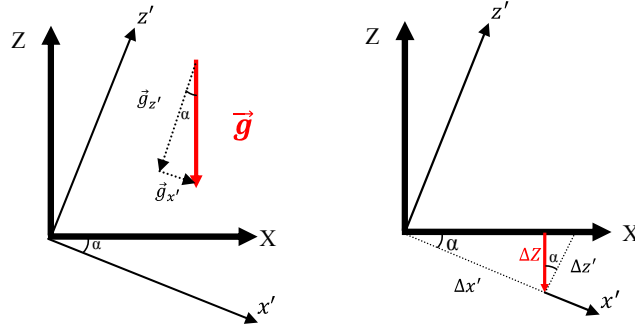


Figure 44 : Décomposition du vecteur gravité

L'équation (3.65) devient alors :

$$\frac{\partial \|\vec{U}\|}{\partial t} + s_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \right) = -g s_i \frac{\partial Z}{\partial x_i} - s_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} \right) + s_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tau_{ij}}{\rho} \right) \quad (3.68)$$

$$\Leftrightarrow s_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\|\vec{U}\|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gZ \right) \right] = - \frac{\partial \|\vec{U}\|}{\partial t} + s_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tau_{ij}}{\rho} \right) \quad (3.69)$$

Comme s est une ligne de courant obtenue à un instant t fixe :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\|\vec{U}\|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gZ \right) = - \frac{\partial \|\vec{U}\|}{\partial t} + s_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tau_{ij}}{\rho} \right) \quad (3.70)$$

L'intégration de la relation précédente entre deux points A et B le long de ce parcours figé permet finalement d'obtenir :

$$\left(\frac{\|\vec{U}\|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gZ \right)_B - \left(\frac{\|\vec{U}\|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gZ \right)_A = \int_A^B \left[- \frac{\partial \|\vec{U}\|}{\partial t} + s_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tau_{ij}}{\rho} \right) \right] ds \quad (3.71)$$

Dimensionnellement, le terme de tension est associé à un travail effectué sur la ligne de courant :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tau_{ij}}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tau_{ij}}{\rho} \frac{V}{V} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tau_{ij}}{m} V \right) \equiv \frac{F_i}{M} \quad (3.72)$$

$$\int_A^B \left[s_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tau_{ij}}{\rho} \right) \right] ds \equiv \int_A^B \frac{F_i s_i}{M} ds = \int_A^B \frac{F_t}{M} ds \quad (3.73)$$

Autrement dit, ce terme représente les pertes le long de la ligne de courant.

Si l'écoulement est stationnaire et que les pertes sont négligées :

$$\left(\frac{\|\vec{U}\|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gZ \right)_B = \left(\frac{\|\vec{U}\|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gZ \right)_A \quad (3.74)$$

En résulte le célèbre principe de Bernoulli, valable le long d'une ligne de courant pour un fluide incompressible et homogène ne générant aucune perte. Sous ces hypothèses, le théorème de Bernoulli ne dépend pas du chemin d'intégration, il s'agit donc d'une fonction d'état.

$$\left(\frac{\|\vec{U}\|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gZ \right) = Cst \quad (3.75)$$

Le théorème de Bernoulli exprime la conservation de la charge mécanique totale, somme de la hauteur piézométrique $Z + \frac{p}{\rho g}$ et de l'énergie cinétique $\frac{U^2}{2g}$, dont la dimension usuelle est le mètre.

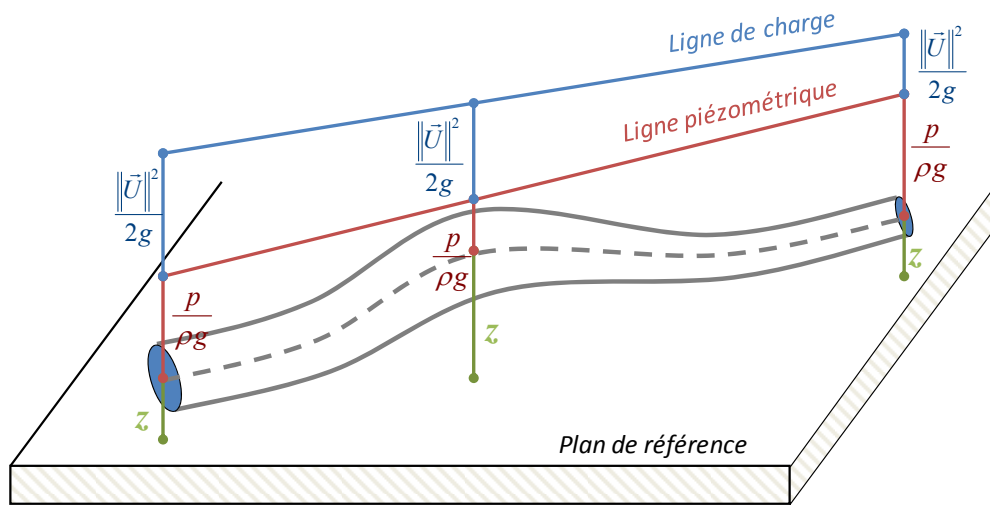


Figure 45 : Illustration du principe de Bernoulli

À noter que les altitudes Z de la ligne de cote sont données par rapport à un plan de référence horizontal.

Remarque : en instationnaire, la généralisation du théorème de Bernoulli n'est pas évidente étant donné que les bornes d'intégration A et B ne peuvent pas nécessairement être reliées en tout temps par des lignes de courant instantanées. Pour rappel, les trajectoires et les lignes de courant ne sont confondues que dans des écoulements stationnaires.

4.3 Exemple d'application

4.3.1 Effet Venturi

Le fonctionnement de ce spray peut être expliqué par application de (3.75). Soient deux fluides : un gaz et un liquide. Le gaz est contenu dans un ballon souple alors que le liquide est stocké dans un réservoir fermé dont la phase gazeuse est à pression atmosphérique P_{atm} .

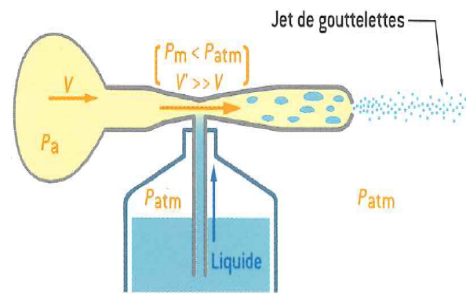


Figure 46 : Effet Venturi

L'application d'une pression sur le ballon chasse le gaz contenu dans ce dernier à l'intérieur d'un tube horizontal. Dans ce dernier la section de passage est rétrécie volontairement au droit du réservoir afin d'y augmenter encore la vitesse. En ce point, la vitesse du gaz y est ainsi maximale et donc la pression, à l'inverse, minimale. En effet, par application directe de loi de Bernoulli, augmenter la vitesse du gaz dans le tube a pour effet d'y diminuer la pression : $P_{\text{gaz}} < P_{\text{atm}}$. La différence de pression entre la phase gazeuse dans le réservoir et le gaz dans le tube a pour effet d'entraîner le liquide vers l'extérieur du dispositif.

4.3.2 Siphon

Un siphon peut également s'expliquer par la loi de Bernoulli. En effet, une fois l'écoulement amorcé, une ligne de courant continue existe entre les surfaces libres des deux volumes d'eau présents dans les récipients et l'équation (3.75) est alors applicable. A la surface des récipients, la pression est identique (pression atmosphérique) et la vitesse y est supposée négligeable. Toutefois, la différence de hauteur crée un déséquilibre. L'écoulement se poursuit jusqu'à ce que l'équilibre soit rétabli.

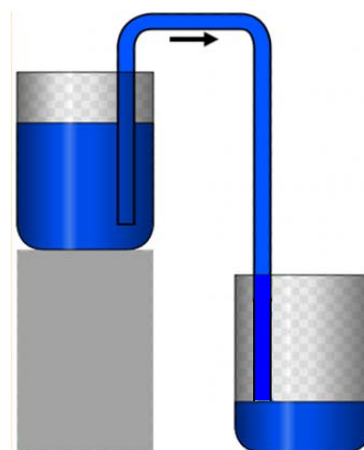


Figure 47 : Siphon

Ce procédé est connu depuis très longtemps et était notamment utilisé par les romains pour franchir certaines vallées dans l'acheminement de l'eau vers les cités grâce aux aqueducs qui utilisaient cependant principalement des écoulements à surface libre.



Figure 48 : Pont du Gard – portion de l'aqueduc romain acheminant l'eau à Nîmes

Ils utilisaient des canalisations constituées de pierres percées mises bout à bout et s'emboîtant via une "partie mâle" complémentaire de la "partie femelle". De plus il était prévu sur ce tube de pierre des trous permettant d'aller curer la canalisation avec un bras ! Ces trous de curage étaient fermés avec des blocs de plusieurs tonnes qui résistaient à la pression. En France le plus connu des ponts-siphon gallo-romain est celui de Gien.



Figure 49 : Tuyau en pierres percées et vestiges du pont-siphon gallo-romain du Gien



Figure 50 : Pont-siphon sur un affluent de la Marne (aqueduc de la Vanne)

4.3.3 Cavitation

La cavitation est un phénomène important car il est responsable de dégâts importants, notamment dans les installations hydroélectriques.



Figure 51 : Dégâts occasionnés par la cavitation sur une roue de pompe

Dans certaines conditions de confinement et de vitesse, la pression totale peut descendre sous la pression de vapeur saturante. Cela génère des bulles gazeuses de fluide. Lorsque les conditions de pression remontent, ces bulles implosent, ce qui peut détruire à terme les structures.



Figure 52 : image instantanée de l'implosion d'une bulle de cavitation

La chute de pression par mise en vitesse peut par exemple avoir lieu dans le corps de pompes centrifuges ou encore de turbines.

5 Conservation de l'énergie

5.1 Formalisme

La première loi de la thermodynamique s'énonce comme suit : « *dans un système isolé, l'énergie est conservée* ». D'autre part, pour un système ouvert la variation d'énergie interne du système est définie par :

$$\Delta E = Q - W \quad (3.76)$$

avec Q la chaleur échangée au travers des frontières du système, W le travail effectué par le système et E l'énergie interne du système.

L'énergie interne est une variable d'état. Au contraire, le travail n'est pas une variable d'état mais un mode de transfert ordonné d'énergie entre le milieu extérieur et le système. De même, la chaleur n'est pas non plus une variable d'état mais un mode de transfert d'énergie microscopique désordonné.

Ainsi, le lien entre la dérivée totale de l'énergie du système par rapport au temps et la variation de chaleur et de travail dans ce dernier s'exprime comme suit :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\delta Q}{\delta t} - \frac{\delta W}{\delta t} \quad (3.77)$$

En effet, E étant une variable d'état, sa variation est donc exprimée via une différentielle totale exacte d alors que la variation de W et Q s'exprime via une différentielle totale inexacte symbolisée par δ .

Le travail extérieur W est constitué du travail des forces de frottement W_{sh} et du travail des forces de pression W_{pr} :

$$\delta W = \delta W_{sh} + \delta W_{pr} = \delta W_{sh} + \delta t \int_A p \vec{U} \cdot \vec{n} dA \quad (3.78)$$

L'énergie interne par unité de masse e permet de relier E à sa grandeur intensive associée :

$$E = \int_V \rho e dV \quad (3.79)$$

Si les effets de tension de surface, magnétique, électrique ou nucléaire sont négligeables, l'énergie interne par unité de masse s'exprime comme :

$$e = gZ + \frac{\|\vec{U}\|^2}{2} + u^{**} \quad (3.80)$$

avec u^{**} l'énergie intrinsèque.

Étant donné la relation (3.18), le principe de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} dV + \int_A (\rho e \vec{U}) \cdot \vec{n} dA \quad (3.81)$$

Étant donné (3.78) et (3.81), l'équation (3.77) équivaut à :

$$\frac{\delta Q}{\delta t} - \frac{\delta W_{sh}}{\delta t} = \int_V \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} dV + \int_A \left[\left(\frac{p}{\rho} + e \right) \rho \vec{U} \right] \cdot \vec{n} dA \quad (3.82)$$

Afin d'exposer la similitude entre le principe de conservation de l'énergie et le principe de Bernoulli abordé précédemment (équation (3.75)), l'écoulement stationnaire au travers d'un volume de contrôle est étudié (Figure 53). Les vitesses à l'entrée u_1 et à la sortie u_2 sont considérées horizontales.

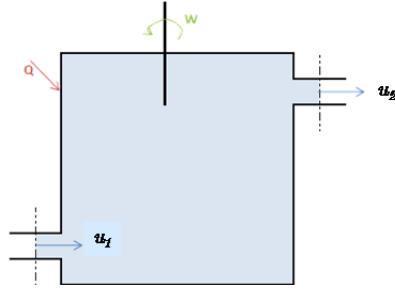


Figure 53 : écoulement stationnaire au travers d'un volume de contrôle

L'écoulement étant stationnaire, l'équation (3.82) se réduit à :

$$\frac{\delta Q}{\delta t} - \frac{\delta W_{sh}}{\delta t} = \int_A \left(\frac{p}{\rho} + e \right) \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dA \quad (3.83)$$

En exprimant que l'énergie interne par unité de masse est donnée par (3.80), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{\delta t} - \frac{\delta W_{sh}}{\delta t} = & - \int_{A_1} \left(\underbrace{\frac{\overline{p_1}}{\rho_1}}_{\text{Energie de pression}} + \underbrace{gZ_1}_{\text{Energie potentielle}} + \underbrace{\frac{\overline{u_1^2}}{2}}_{\text{Energie cinétique}} + u_1^{**} \right) \rho_1 u_1 dA_1 \\ & + \int_{A_2} \left(\frac{p_2}{\rho_2} + gZ_2 + \frac{u_2^2}{2} + u_2^{**} \right) \rho_2 u_2 dA_2 \end{aligned} \quad (3.84)$$

Afin de simplifier cette équation, un certain nombre d'hypothèses sont formulées :

- Energie intrinsèque constante sur chaque surface

$$\int_A u^{**} \rho u dA = u^{**} \int_A \rho u dA \quad (3.85)$$

- Energie potentielle moyennée sur la surface

$$\int_A gZ \rho u dA = \overline{gZ} \int_A \rho u dA \quad (3.86)$$

- Pression distribuée uniformément sur la surface

$$\int_A \frac{p}{\rho} \rho u dA = \frac{\bar{p}}{\rho} \int_A \rho u dA \quad (3.87)$$

- Energie cinétique moyennée sur la surface (emploi d'un coefficient d'inégale répartition)

$$\int_A \frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \rho u dA = \varphi \frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \int_A \rho u dA \quad (3.88)$$

Ainsi, en tenant compte des hypothèses précédentes, (3.84) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{\delta t} + \left(\frac{\bar{p}_1}{\rho_1} + g\bar{Z}_1 + \varphi_1 \frac{u_1^2}{2} + u_1^{**} \right) \rho_1 u_1 A_1 = \\ \frac{\delta W_{sh}}{\delta t} + \left(\frac{\bar{p}_2}{\rho_2} + g\bar{Z}_2 + \varphi_2 \frac{u_2^2}{2} + u_2^{**} \right) \rho_2 u_2 A_2 \end{aligned} \quad (3.89)$$

5.2 Conservation de l'énergie et principe de Bernoulli

L'équation (3.84) exprimant la conservation de l'énergie dans le cas d'un écoulement stationnaire tel que décrit par la Figure 53 peut être comparée au principe de Bernoulli vu précédemment :

- Conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{\delta t} - \frac{\delta W_{sh}}{\delta t} = - \int_{A_1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} + gZ_1 + \frac{u_1^2}{2} + u_1^{**} \right) \rho_1 u_1 dA_1 \\ + \int_{A_2} \left(\frac{p_2}{\rho_2} + gZ_2 + \frac{u_2^2}{2} + u_2^{**} \right) \rho_2 u_2 dA_2 \end{aligned} \quad (3.90)$$

- Principe de Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + gZ + \frac{u^2}{2} = C^{st} \quad (3.91)$$

Le parallélisme des composantes est évident et le formalisme consistant.

6 Expression de la rotation d'une particule fluide

6.1 Rotation d'un corps solide vs. rotation d'une particule fluide

Pour un corps *solide*, la vitesse angulaire (vitesse de rotation autour d'un axe) est donnée par

$$\omega = \frac{v_\theta}{R} \text{ où } v_\theta = R \cdot \text{Constante} \quad (3.92)$$

avec v_θ la vitesse de la particule en $[m/s]$ et R le rayon de la rotation en $[m]$. Par conséquent, chaque point a une vitesse proportionnelle à sa distance à l'axe de rotation.

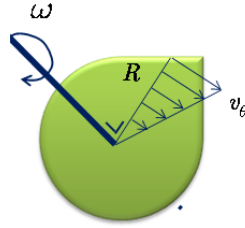
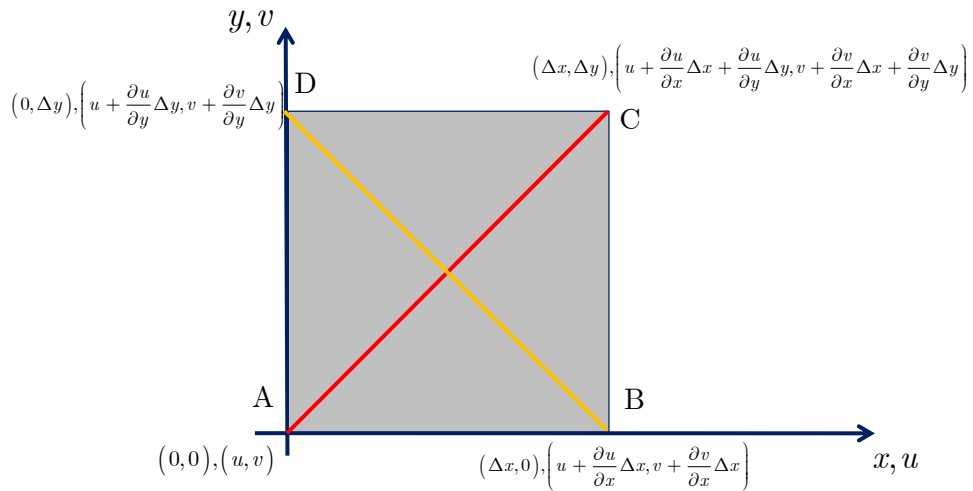
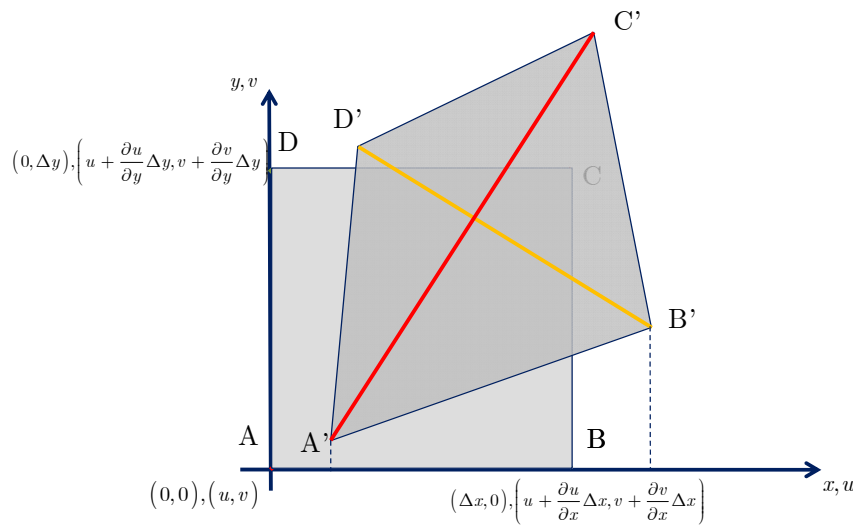


Figure 54: Rotation d'un corps solide

Pour un fluide, étant donné la déformation due à l'écoulement, l'obtention de la vitesse de rotation est beaucoup plus complexe. Soit une particule $ABCD$ au temps t dans un écoulement plan $2D$ (Figure 55).

Figure 55 : Particule en rotation au temps initial t

Les diagonales de la particule fournissent en tout temps son orientation. En $t + \Delta t$, l'écoulement emporte la particule qui est alors définie par $A'B'C'D'$.

Figure 56: Particule en rotation au temps $t + \Delta t$

Cette dernière a subi une *translation*, une *rotation* ainsi qu'une *déformation*. La section suivante est consacrée à la description du mouvement de rotation de la particule fluide alors que la déformation est abordée ultérieurement (section 7)

6.2 Vitesse angulaire d'une particule fluide

La vitesse angulaire ω est liée à la déformation angulaire ε par :

$$\omega = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x, \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t} \quad (3.93)$$

De plus, en première approximation, l'angle de rotation de la diagonale $\Delta \varepsilon$ est liée à $\Delta \alpha$ et $\Delta \beta$ (voir Figure 57) par :

$$\Delta \varepsilon = \frac{1}{2}(\Delta \alpha - \Delta \beta) \quad (3.94)$$

puisque les angles γ et γ' indiquant la direction de la diagonale de la particule en $t + \Delta t$ au point A sont égaux au premier ordre.

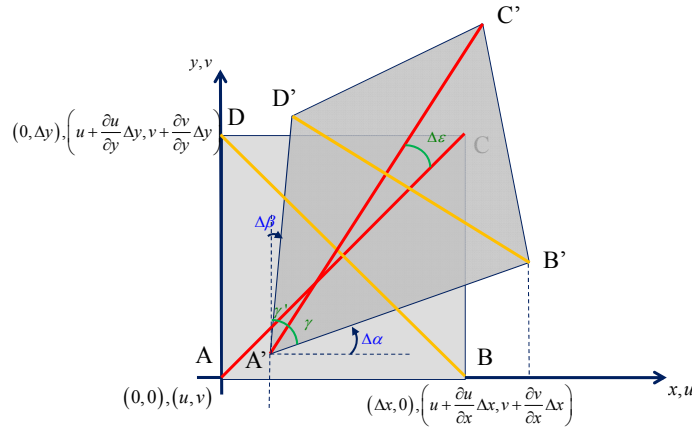


Figure 57: Particule en rotation au temps t ($ABCD$) et au temps $t + \Delta t$ ($A'B'C'D'$)

Compte tenu que les projections horizontale et verticale du segment $\overline{A'B'}$ peuvent être exprimées par :

$$\begin{cases} \overline{A'B'}|_y = \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right) \Delta t - v \Delta t + O(\Delta x^2 \Delta t) \\ \overline{A'B'}|_x = \Delta x + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \right) \Delta t - u \Delta t + O(\Delta x^2 \Delta t) \end{cases} \quad (3.95)$$

il est possible de déterminer les angles de changement de direction $\Delta \alpha$ et $\Delta \beta$. En effet :

$$\Delta \alpha \approx \tan \Delta \alpha = \frac{\overline{A'B'}|_y}{\overline{A'B'}|_{y-x}} \quad (3.96)$$

En substituant (3.95) dans (3.96) :

$$\Delta\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \Delta t + O(\Delta x^2 \Delta t)}{\Delta x \left[1 + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t + O(\Delta x \Delta t) \right]} = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta t + O(\Delta x \Delta t) \quad (3.97)$$

Et, de la même manière :

$$\Delta\beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \Delta t + O(\Delta y^2 \Delta t)}{\Delta y \left[1 + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta t + O(\Delta y \Delta t) \right]} = \frac{\partial u}{\partial y} \Delta t + O(\Delta y \Delta t) \quad (3.98)$$

En substituant (3.97) et (3.98) dans (3.94), il vient :

$$\Delta\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta t + O(\Delta x \Delta t) - \frac{\partial u}{\partial y} \Delta t - O(\Delta y \Delta t) \right) = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.99)$$

La vitesse angulaire vaut donc finalement :

$$\begin{aligned} \omega &= \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x, \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} = \frac{d\varepsilon}{dt} \\ \omega &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{U})_z \end{aligned} \quad (3.100)$$

La généralisation en 3D des développements précédents est immédiate :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{U}) \quad (3.101)$$

6.3 Description du champ vectoriel tourbillonnaire

Le vecteur tourbillon peut être défini par le rotationnel du vecteur vitesse :

$$\vec{\Omega} \equiv \nabla \times \vec{U} = 2\vec{\omega} \quad (3.102)$$

La rotation du vecteur vitesse $\vec{\Omega}$ peut donc être interprétée comme le double de la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ de la particule fluide.

Dans le cas où $\nabla \times \vec{U} = 0$ la rotation des diagonales de la particule est nulle et l'orientation demeure donc inchangée. Par contre la particule peut tout de même subir une translation et une déformation.

De plus, le champ $\vec{\Omega}$ est un champ à divergence nulle ou *solénoïdal* :

$$\nabla \times \vec{U} = \vec{\Omega} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{\Omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{U}) = 0 \quad (3.103)$$

Par analogie avec la description cinématique du champ de vitesse, **une ligne (ou fil) tourbillonnaire** est définie comme étant une « *courbe dans l'espace qui, à un instant t fixe, possède en chacun de ses points une tangente parallèle au vecteur tourbillon* ».



Figure 58: Ligne tourbillonnaire

L'expression mathématique d'une ligne tourbillonnaire est donc bien entendu similaire à celle des lignes de courants :

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z} \quad (3.104)$$

Toujours par analogie avec la théorie des lignes de courant, il peut exister des surfaces tourbillonnaires et en particulier des tubes tourbillonnaires (Figure 59).

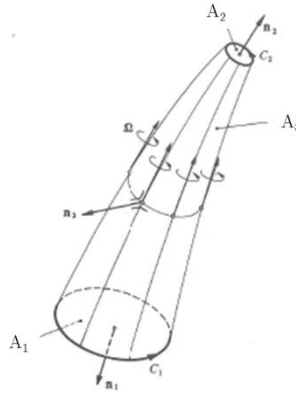


Figure 59 : Tube tourbillonnaire

Le débit tourbillonnaire défini par

$$\int_A (\vec{n} \cdot \vec{\Omega}) dA \quad (3.105)$$

est dit constant le long d'un tube tourbillonnaire. En effet, en appliquant le théorème de Green :

$$\int_A (\vec{n} \cdot \vec{\Omega}) dA = \int_V (\nabla \cdot \vec{\Omega}) dV = 0 \quad (3.106)$$

avec A définie par A_1 et A_2 les surfaces des sections d'extrémité et A_3 la surface du tube entre ces deux sections. De plus, en prenant en compte que par définition du tube tourbillonnaire l'intégrale sur la paroi est nulle, l'équation (3.106) devient :

$$-\int_{A_1} (\vec{n} \cdot \vec{\Omega}) dA = \int_{A_2} (\vec{n} \cdot \vec{\Omega}) dA \quad (3.107)$$

Le débit tourbillonnaire est donc constant le long du tube.

6.4 Théorèmes et loi de Helmholtz

Étant donné (3.107), un tube tourbillonnaire ne peut pas commencer ou se terminer dans le fluide. Seuls trois états sont possibles :

- le tube est de longueur infinie, même dans un volume limité ;
- le tube suit des courbes fermées ;
- le tube commence ou se termine aux surfaces ou aux frontières du fluide.

Par définition, la circulation vaut :

$$\Gamma = \oint_C \vec{U} \cdot d\vec{r} \quad (3.108)$$

En appliquant le théorème de Stokes au débit tourbillonnaire (3.106) :

$$\int_A \vec{n} \cdot \vec{\Omega} dA = \int_A \vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{U}) dA = \oint_C \vec{U} \cdot d\vec{r} = \Gamma \quad (3.109)$$

Étant donné que le débit tourbillonnaire est constant le long du tube :

$$-\int_{A_1} (\vec{n} \cdot \vec{\Omega}) dA = \int_{A_2} (\vec{n} \cdot \vec{\Omega}) dA = \oint_{C_1} \vec{U} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_2} \vec{U} \cdot d\vec{r} = \Gamma = Cste \quad (3.110)$$

La loi de Helmholtz s'énonce comme suit : «La circulation Γ autour d'un tube tourbillonnaire est donc constante et représente une mesure de l'intensité du tube tourbillonnaire».

6.4.1 Cas particulier : fil tourbillonnaire rectiligne

Un fil tourbillonnaire rectiligne engendre un champ de vitesse stationnaire bidimensionnel dans le plan perpendiculaire au fil. En coordonnées cylindriques, la vitesse radiale est nulle :

L'équation (3.110) permet d'exprimer la vitesse v_θ en fonction de la circulation Γ et de la distance radiale R par rapport au fil tourbillonnaire :

$$\oint_C \vec{U} \cdot d\vec{r} = \Gamma \quad \forall C \Rightarrow v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi R} \quad (3.111)$$

La vitesse varie donc de manière inversement proportionnelle à la distance. Si $R \rightarrow 0, v_\theta \rightarrow \infty$.

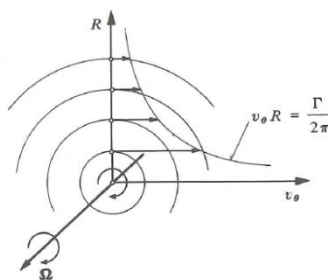


Figure 60 : Champ de vitesse dans un plan perpendiculaire à un fil tourbillonnaire rectiligne

6.4.2 Surface libre d'un tourbillon d'eau

Soit un fil tourbillonnaire dans un fluide à surface libre (Figure 61).

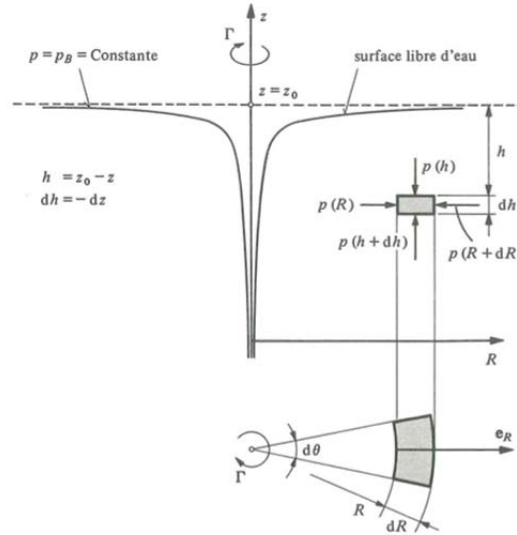


Figure 61: Position d'équilibre d'un tourbillon d'eau

Pour déterminer la position de la surface libre, il faut exprimer les équilibres horizontaux et verticaux d'un volume élémentaire. Ayant fixé la surface libre d'eau à la hauteur z_0 pour $R \rightarrow \infty$, la position verticale du volume de contrôle est également donnée par :

$$h = z_0 - z \Rightarrow dh = -dz \quad (3.112)$$

Par équilibres, il vient :

- Equilibre vertical (force de pression et poids) :

$$\begin{aligned} \int_V \rho \vec{F} dV - \int_A p \vec{n} dA &= 0 \\ \Leftrightarrow -\rho g R d\theta dR dh + [-p(h) + p(h+dh)] R d\theta dR &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial h} = \rho g = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{pour } dR, d\theta \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.113)$$

L'expression de la pression est la même qu'en hydrostatique.

- Equilibre horizontal (gradient de pression radial) :

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \rho \frac{v_\theta^2}{R} = \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi^2 R^3} \quad (3.114)$$

Ainsi, **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** et (3.114) expriment l'évolution de la pression en fonction de la profondeur h et de la distance radiale R :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial R} = \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi^2 R^3} \\ \frac{\partial p}{\partial h} = \rho g \end{cases} \quad (3.115)$$

Après intégration, il vient :

$$\begin{cases} p = -\frac{\rho \Gamma^2}{4\pi^2} \frac{R^{-2}}{2} + f(h) \\ p(h) = \rho g h \end{cases} \quad (3.116)$$

En combinant les deux équations du système (3.116), il vient :

$$p = -\frac{\rho \Gamma^2}{4\pi^2} \frac{R^{-2}}{2} + \rho gh + C \quad (3.117)$$

$$p = -\frac{\rho \Gamma^2}{4\pi^2} \frac{R^{-2}}{2} + \rho g(z_0 - z) + C \quad (3.118)$$

La surface libre du tourbillon peut finalement être déduite de (3.118) :

$$z = z_0 - \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 g R^2} \quad (3.119)$$

Il est à remarquer, que si R diminue, z diminue (Figure 62).

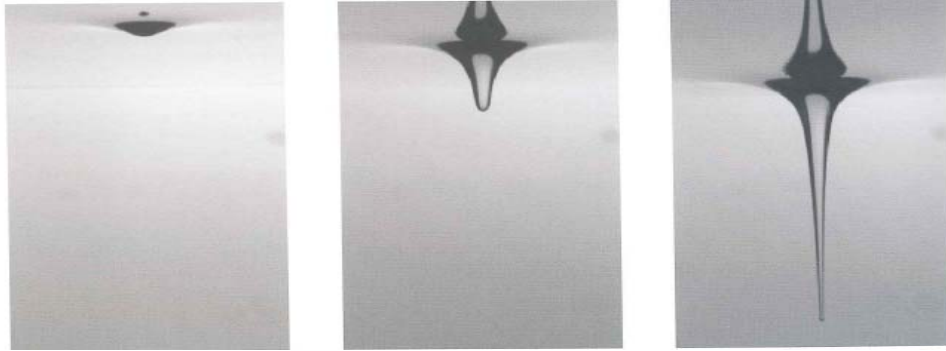


Figure 62 : Installation d'un tourbillon illustrant le position de la surface libre

Dans le cas limite où $R \rightarrow 0, z \rightarrow -\infty$. Cependant, comme le montre l'illustre la figure ci-dessus, ce cas est purement théorique. En effet, en pratique il y aura cavitation et redistribution du champ de vitesse par effets visqueux.

7 Expressions des tensions visqueuses

En faisant l'hypothèse d'un fluide Newtonien ($\tau \propto \frac{\delta \theta}{\delta t}$) en écoulement unidimensionnel selon x dont le profil de vitesse est celui de la Figure 63.

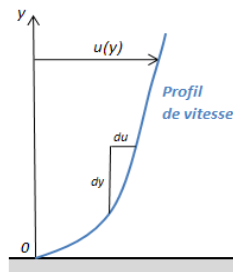


Figure 63 : Profil de vitesse d'un fluide Newtonien en écoulement unidimensionnel

Pour cet écoulement, la déformation d'un volume élémentaire $\Delta x \Delta y$ pendant Δt est représentée sur la Figure 64 :

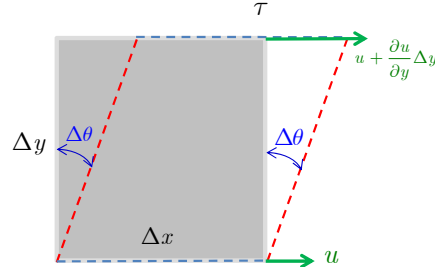


Figure 64 : Déformation d'une particule fluide

En faisant l'hypothèse que Δt et $\Delta \theta$ tendent vers 0 :

$$\tan(\Delta \theta) = \frac{\partial u \Delta t}{\partial y} \Rightarrow \lim_{\Delta \theta, \Delta t \rightarrow 0} \frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dy} \quad (3.120)$$

Or comme le fluide est Newtonien :

$$\tau = \mu \frac{d\theta}{dt} \quad (3.121)$$

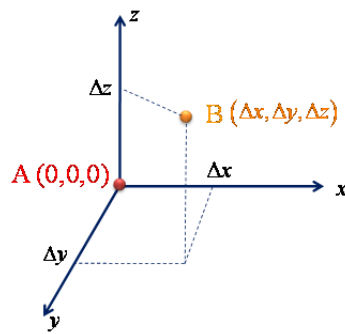
Et donc finalement :

$$\Rightarrow \tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (3.122)$$

L'équation (3.122) lie la contrainte τ et le champ de vitesse du/dy . Afin de généraliser cette relation au cas tridimensionnel, il faut tout d'abord trouver une expression pour le tenseur des taux de déformation.

7.1 Tenseur des taux de déformation 3D

Soient deux points A et B à l'instant t (Figure 65).

Figure 65 : Point A et B au temps t

Les différentielles de vitesses selon les trois axes sont définies par :

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x} dx + \frac{\partial u_i}{\partial y} dy + \frac{\partial u_i}{\partial z} dz \quad (3.123)$$

L'état de l'écoulement autour du point A (Figure 65) est donc décrit par le tenseur :

$$\overline{\overline{P}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.124)$$

Il est possible de décomposer ce tenseur en deux parties :

- Une partie asymétrique $\overline{\overline{X}}$:

$$\overline{\overline{X}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.125)$$

- Une partie symétrique $\overline{\overline{D}}$:

$$\overline{\overline{D}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.126)$$

Le tenseur $\overline{\overline{X}}$ décrit le mouvement rotationnel de la particule (3.100). Comme il va l'être démontré, le tenseur symétrique $\overline{\overline{D}}$ est quant à lui le tenseur des taux de déformation.

Afin de caractériser les termes diagonaux de $\overline{\overline{D}}$, il faut analyser l'élongation de \overline{AB} . La taille de ce segment après Δt dans chaque direction vaut :

$$\begin{aligned} \overline{AB}\Big|_{x,t+\Delta t} &= \Delta x + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\right)\Delta t - u\Delta t = \Delta x\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta t\right) \\ \overline{AB}\Big|_{y,t+\Delta t} &= \Delta y + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)\Delta t - v\Delta t = \Delta y\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta t\right) \\ \overline{AB}\Big|_{z,t+\Delta t} &= \Delta z + \left(w + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z\right)\Delta t - w\Delta t = \Delta z\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta t\right) \end{aligned} \quad (3.127)$$

L'élongation de chaque côté :

$$\begin{aligned} \overline{AB}\Big|_{x,t+\Delta t} - \overline{AB}\Big|_{x,t} &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta t\Delta x \\ \overline{AB}\Big|_{y,t+\Delta t} - \overline{AB}\Big|_{y,t} &= \frac{\partial v}{\partial y}\Delta t\Delta y \\ \overline{AB}\Big|_{z,t+\Delta t} - \overline{AB}\Big|_{z,t} &= \frac{\partial w}{\partial z}\Delta t\Delta z \end{aligned} \quad (3.128)$$

Les déformations ε_i ainsi que les taux de déformation ε'_i sont donnés par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t & \varepsilon'_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \Delta t & \varepsilon'_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \Delta t & \varepsilon'_z &= \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\quad (3.129)$$

La somme des taux de déformation ε'_i se note $\varepsilon'_V = \varepsilon'_x + \varepsilon'_y + \varepsilon'_z$. Les taux de déformations dans chacune des directions de l'espace constituent donc les termes diagonaux de \overline{D} .

Afin de déterminer les termes non-diagonaux, il faut trouver une expression pour ε'_{xy} , ε'_{xz} et ε'_{yz} les taux de déformation par cisaillement. En réutilisant la Figure 66, les angles de rotation $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$ sont définis par les équations (3.97) et (3.98).

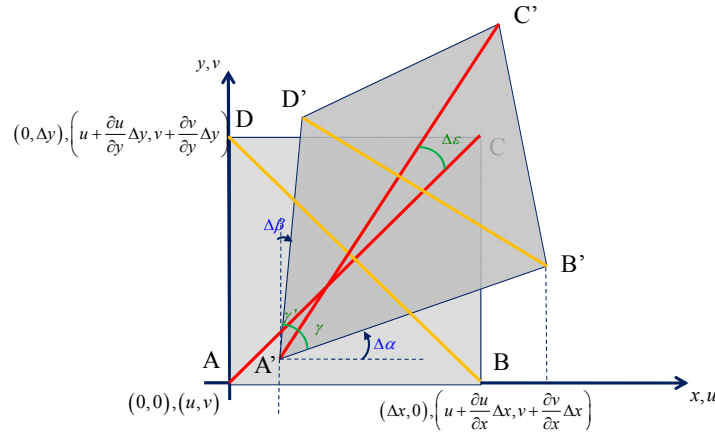


Figure 66 : Déformation d'une particule

Compte tenu de la convention de signe sur la Figure 66, la déformation angulaire définie par (3.94) devient :

$$\Delta\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(\Delta\alpha + \Delta\beta) \quad (3.130)$$

Le taux de déformation est donc donné par :

$$\varepsilon'_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.131)$$

L'ensemble des termes de \overline{D} exprime donc bien le tenseur des taux de déformation au point A :

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon'_{xx} & \varepsilon'_{xy} & \varepsilon'_{xz} \\ \varepsilon'_{yx} & \varepsilon'_{yy} & \varepsilon'_{yz} \\ \varepsilon'_{zx} & \varepsilon'_{zy} & \varepsilon'_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.132)$$

Le tenseur $\overline{\overline{P}}$ est donc composé d'un tenseur asymétrique $\overline{\overline{X}}$ représentant le mouvement rotationnel au point A et d'un tenseur symétrique $\overline{\overline{D}}$ représentant les taux de déformation en ce même point.

7.2 Généralisation de la relation contraintes-taux de déformation

Pour généraliser la relation (3.122) au cas tridimensionnel liant contraintes et taux de déformation pour un fluide newtonien, il faut tenir compte que :

- chacune des contraintes normales doit être exactement égale et de signe opposé à la pression hydrostatique lorsque les gradients de vitesse ont disparu ;
- la rotation du fluide à la manière d'un corps solide implique la *disparition des contraintes tangentielles* ;
- la relation entre contrainte et taux de déformation est *linéaire* ;
- les fluides newtoniens sont *isotropes*.

Etant donné que le tenseur des contraintes $\overline{\overline{\tau}}$ décrit par (3.43) est symétrique (voir (3.41)), il possède 6 composantes indépendantes au lieu de 9.

De plus, un repère constitué par les axes principaux d'un tenseur symétrique est caractérisé par la seule existence des composantes normales.

Pour un fluide isotrope, les axes principaux du tenseur des taux de déformation coïncident avec ceux du tenseur déviateur. Ainsi dans un tel repère, il est admis qu'une contrainte normale, par exemple $\tau_{xx} = \sigma_{xx} + p$ peut s'écrire sous forme linéaire :

$$\tau_{xx} = C \frac{\partial u}{\partial x} + \xi \frac{\partial v}{\partial y} + \xi \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.133)$$

Dans cette expression $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial y$ et $\partial w/\partial z$ représentent les composantes de taux de déformation dans les directions respectives de τ_{xx} et τ_{yy} et τ_{zz} . Les coefficients C et ξ traduisent les propriétés internes du fluide. L'équation (3.133) peut donc s'écrire :

$$\tau_{xx} = \xi(\nabla \cdot \vec{U}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{avec} \quad 2\mu = C - \xi \quad (3.134)$$

Les composantes τ_{yy} et τ_{zz} peuvent être exprimées de manière analogue.

Ensuite la règle de transformation d'un tenseur est utilisée pour obtenir $\overline{\overline{\tau}}$ dans un repère quelconque. Ainsi, l'unique relation vérifiant les quatre conditions entre les contraintes et taux de déformations s'écrit :

$$\overline{\overline{\tau}} = \xi(\nabla \cdot \vec{U}) \overline{\overline{I}} + 2\mu \overline{\overline{D}} \quad (3.135)$$

En utilisant les coordonnées cartésiennes, il vient :

$$\begin{aligned}
 \tau_{xx} &= \sigma_{xx} + p = \xi (\nabla \cdot \vec{U}) + 2\mu \partial u / \partial x \\
 \tau_{yy} &= \sigma_{yy} + p = \xi (\nabla \cdot \vec{U}) + 2\mu \partial v / \partial y \\
 \tau_{zz} &= \sigma_{zz} + p = \xi (\nabla \cdot \vec{U}) + 2\mu \partial w / \partial z \\
 \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x) \\
 \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu (\partial v / \partial z + \partial w / \partial y) \\
 \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu (\partial w / \partial x + \partial u / \partial z)
 \end{aligned} \tag{3.136}$$

Dans ces formules, μ représente la viscosité dynamique et ξ est un deuxième coefficient de viscosité.

Il apparait dans (3.135) que ξ n'a pas d'intérêt pour un fluide incompressible puisque $\nabla \cdot \vec{U} = 0$ et que tous les termes contenant ξ sont alors nuls. En effet, dans le cas d'un fluide incompressible, l'équation (3.135) se réduit à :

$$\vec{\tau} = 2\mu \vec{D} \tag{3.137}$$

ou encore :

$$\vec{\tau} = 2\mu \vec{D} = \mu \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 2 \frac{\partial v}{\partial y} & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{3.138}$$

dans laquelle la seconde viscosité n'a pas d'influence.

De manière générale, la somme des trois contraintes normales peut s'écrire sous la forme :

$$3p + (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = (3\xi + 2\mu) \nabla \cdot \vec{U} \tag{3.139}$$

Dés lors, pour un fluide incompressible :

$$p = -\frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \tag{3.140}$$

Cela veut dire que, dans ce cas, la pression s'exprime par la valeur moyenne des contraintes normales. Pour un fluide compressible, il peut être montré à l'aide du deuxième principe des gaz :

$$\mu' = \xi + \frac{2}{3} \mu \geq 0 \tag{3.141}$$

où μ' est la viscosité du volume. Le cas où μ' est égal à 0 se produit pour un gaz monoatomique. Dans ce cas, la théorie cinétique des gaz montre que :

$$\xi = -\frac{2}{3} \mu \tag{3.142}$$

8 Équations de Navier-Stokes

Pour rappel les équations de base de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{cases} \quad (3.143)$$

Dans la section précédente, le terme τ des tensions visqueuses dans le fluide a été étudié. Il est donc à présent possible de généraliser les trois équations de la conservation de la quantité de mouvement en exprimant $\partial \tau_{ij} / \partial x_j$.

Dans le cas d'un fluide newtonien compressible, il vient :

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\xi (\nabla \cdot \vec{U}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon'_{ij} \right) \quad (3.144)$$

Par conséquent, en définissant une nouvelle pression complexe, l'équation de quantité de mouvement devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} &= \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\xi (\nabla \cdot \vec{U}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon'_{ij} \right) \\ &= \rho F_i - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\xi (\nabla \cdot \vec{U}) \right)}_{\text{pression complexe}} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu \varepsilon'_{ij}) \end{aligned} \quad (3.145)$$

Ce sont les équations de Navier-Stokes dans le cas d'un fluide compressible. Dans le cas d'un fluide newtonien incompressible, (3.144) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} &= \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \mu \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \mu \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{=0 \text{ par continuité}} \right) = \mu \Delta u_i \end{aligned} \quad (3.146)$$

Et les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible s'obtiennent en substituant (3.146) dans (3.143) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i \end{cases} \quad (3.147)$$

En notation vectorielle :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{U} = 0 \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \vec{U}) = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{U} \end{cases} \quad (3.148)$$

Avec ν la viscosité cinématique définie par :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.149)$$

9 Equations d'Euler

9.1 Formulations conservative et non conservative

Euler (1707-1783) introduisit le concept de fluide idéal pour étudier des fluides peu visqueux tels que l'air et eau. L'hypothèse de fluide idéal considère le fluide comme étant non visqueux et sans conductivité thermique. Les équations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse dans le cas générale d'un fluide compressible se réduisent donc à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \end{cases} \quad (3.150)$$

Cette hypothèse revient à éliminer un certains nombres de phénomènes : pertes de charge, trainée, séparation d'un écoulement, etc.

Le système d'équation (3.150) est écrit sous forme conservative. En développant le membre de gauche de l'équation de la conservation de quantité de mouvement, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} &= \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \\ &= u_i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right] + \rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \\ &= \underbrace{u_i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right]}_{\text{continuité}} + \rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (3.151)$$

Le système d'équations (3.150) devient donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \\ \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \end{cases} \quad (3.152)$$

Ou encore, en notation vectorielle :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \end{cases} \quad (3.153)$$

Ce sont les équations d'Euler dites non conservatives. Ces équations peuvent être exprimées sous d'autres formes plus utiles dans certaines situations.

9.2 Formulations alternatives

Soit la règle de calcul vectoriel suivante :

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a}) \quad (3.154)$$

En remplaçant \vec{a} et \vec{b} par la vitesse \vec{U} , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \nabla(\vec{U} \cdot \vec{U}) &= (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} + \underbrace{\vec{U} \times (\nabla \times \vec{U})}_{\vec{\Omega}} \\ \Leftrightarrow (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} &= \frac{1}{2} \nabla(\vec{U} \cdot \vec{U}) + \vec{U} \times (\nabla \times \vec{U}) \\ \Leftrightarrow (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} &= \nabla \left(\frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \right) + \vec{U} \times (\nabla \times \vec{U}) \end{aligned} \quad (3.155)$$

Le système d'équation (3.153) devient donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} - \vec{U} \times \vec{\Omega} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left(\frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \right) \end{cases} \quad (3.156)$$

Cette formulation alternative est appelée *forme de Lamb des équations d'Euler*. Il est à noter que le passage des équations d'Euler (3.153) à la forme de Lamb (3.156) ne fait aucune hypothèse additionnelle sur les termes visqueux. Il serait donc tout à fait possible d'en tirer une forme généralisée pour un fluide visqueux newtonien.

De plus, qu'elles soient exprimées sous la forme du système (3.153) ou sous la forme de Lamb (3.156), les équations d'Euler sont applicables indépendamment de la nature compressible ou incompressible du fluide.

En particulier, dans le cas d'un gaz, il est possible de transformer (3.156) sous une autre forme utile en introduisant deux variables d'état thermodynamiques exprimées par unité de masse :

- l'enthalpie : h [m^2s^{-2}]
- l'entropie : s [$\text{m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1}$]

Ces variables d'état sont liées par la relation d'état d'un gaz homogène (avec T la température $[K]$)

$$\frac{1}{\rho} dp = dh - T ds \quad (3.157)$$

Cette relation décrit en toute généralité le changement d'état d'un gaz homogène. Si l'on considère en particulier la différence d'état entre deux particules quelconques de l'espace séparées par $d\vec{r}$, l'équation (3.157) devient :

$$\left(\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla h + T \nabla s \right) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (3.158)$$

ou encore :

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla h - T \nabla s \quad (3.159)$$

En substituant (3.159) dans (3.156) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} - \vec{U} \times \vec{\Omega} = \vec{F} - \nabla \left[\underbrace{h + \frac{\|\vec{U}\|^2}{2}}_{\text{enthalpie totale}} \right] + T \nabla s \end{array} \right. \quad (3.160)$$

Cette forme alternative est dénommée formulation de *Crocco des équations d'Euler*.

9.3 Fermeture du système

En observant les développements précédents, il apparaît que dans l'hypothèse d'un écoulement incompressible, caractérisé par $D\rho / Dt = 0$, l'écoulement est totalement décrit par les équations d'Euler (3.153) relatives aux 4 variables (champs de vitesse et de pression).

En revanche, en compressible, la thermodynamique impose l'introduction de deux variables d'état, l'enthalpie h et l'entropie s , afin d'assurer la description complète de l'écoulement. Dans ce cas, une équation supplémentaire est requise. Cette équation concerne la conservation de l'énergie.

Le Tableau 3 dresse, pour un fluide idéal, un bilan des diverses hypothèses abordées ci-dessus et de ce qu'elles impliquent en terme de nombres d'inconnues et d'équations nécessaires pour décrire l'écoulement.

	Fluide	Inconnues	Système fermé	Équation de fermeture
Incompressible	Homogène	u, v, w, p	Oui	/
	Hétérogène	u, v, w, p, ρ	Non	1 équation scalaire de mélange
Compressible	Barotrope	u, v, w, p, ρ	Non	1 relation pour fluide barotrope
	Non barotrope homogène	u, v, w, h, s, ρ	Non	1 relation d'état d'un gaz homogène 1 équation de conservation de l'énergie

Tableau 3 : Hypothèses et conséquences dans le cas d'un fluide idéal

Chapitre 4 : Similitudes

Objectifs

- Nécessité de recourir à des modèles physiques
- Etablissement des règles de similitude
- Similitudes usuelles pour un fluide en mouvement
 - Froude
 - Reynolds
- Similitudes pour des transports associés
 - Transport sédimentaire
- Exemples d'essais physiques

Table des matières

1.	Introduction	79
2.	Dimensions d'une grandeur.....	79
3.	Dimensions des grandeurs et équations.....	81
4.	La similitude	82
4.1.	Généralités et définitions	82
4.2.	Relations de similitude	83
5.	Détermination des lois de similitude par méthode directe	84
5.1.	Définition.....	84
5.2.	Mise en évidence de nombres adimensionnels.....	84
5.3.	Nombre de Strouhal.....	86
5.4.	Nombre de Froude.....	86
5.5.	Nombre d'Euler	86
5.6.	Nombre de Reynolds.....	87
6.	Détermination des lois de similitude par analyse dimensionnelle.....	87
6.1.	Définition.....	87
6.2.	Théorème π de Vaschy-Buckingham	88
6.2.1.	Enoncé	88
6.2.2.	Démonstration	88
6.2.3.	Utilisation courante	90
6.2.4.	Application du théorème π : puissance d'une explosion nucléaire	91
7.	Utilisation pratique des similitudes.....	92
7.1.	Généralités.....	92
7.2.	Choix des variables à considérer	92
7.3.	Application du théorème π : force de traînée	93
7.4.	Modèles réduits hydrodynamiques.....	96
7.5.	Courbe maîtresse	97

8.	Lois de similitudes classiques	98
8.1.	Notations et conventions.....	98
8.2.	Forces d'inertie et de pesanteur	98
8.3.	Forces d'inertie et de viscosité	100
8.4.	Forces de pesanteur, d'inertie et de viscosité – Similitude parfaite.....	101
9.	Exemples concrets	101
9.1.	Vanne de la chambre à hydrogène VINCI	101
9.2.	Sédimentation	103
9.3.	Entraînement de particules solides.....	106
9.4.	Pluie sur un cabriolet.....	107
9.5.	Ensablement du Mont Saint-Michel.....	107
9.6.	Effets du vent sur la tour de Burj Khalifa.....	108
9.7.	Effets du vent sur le viaduc de Millau	108

1. Introduction

Les problèmes de mécanique des fluides consistent toujours en des phénomènes complexes et variés. Ils peuvent être abordés, moyennant quelques hypothèses simplificatrices :

- par résolution analytique des équations qui régissent les phénomènes étudiés ;
- par résolution numérique de ces équations ;
- par voie expérimentale partielle ou complète.

On aura ainsi recours à l'expérience

- pour l'établissement de lois comportementales ;
- pour la vérification de tendances pressenties (théoriquement, analytiquement ou numériquement) ;
- pour l'établissement de solutions dans des cas non traitables de manière fiable (limite de validité des hypothèses simplificatrices des modèles analytiques ou numériques, rapidité de calcul, ...).

La plupart des études hydrauliques réalisées en laboratoire se font sur base de **modèles réduits**.

Il est évident que les résultats obtenus sur les modèles doivent correspondre à ceux que l'on aurait sur les **prototypes** (les ouvrages réels) correspondants, via l'application de facteurs d'échelle.

Les règles à respecter pour la réalisation de modèles réduits et leur analyse sont formulées sous la forme de **lois de similitude**. Si l'application de ces lois est souvent très simple (règles de trois), leur détermination demande quelque réflexion. Elle peut se faire suivant deux approches différentes :

- la méthode directe, basée sur l'exploitation des équations de la mécanique des fluides,
- l'analyse dimensionnelle, basée sur le théorème des π de Vaschy-Buckingham.

2. Dimensions d'une grandeur

Avant de s'intéresser aux règles de similitudes proprement dites, il convient d'analyser quelques peu les outils à notre disposition pour créer les équations nécessaires à la modélisation de phénomènes physiques.

Il est possible de diviser les grandeurs physiques en deux classes suivant la forme que prend leur mesure :

- d'une part il y a les grandeurs dont la mesure est indépendante de l'échelle choisie ou d'un système particulier de mesure. Ces grandeurs sont dites adimensionnelles. Ce sont les angles, les coefficients de Poissons, les rapports de deux longueurs,...
- d'autre part, il y a les grandeurs dépendantes du système de mesure et de l'échelle choisie. Ces grandeurs sont dites dimensionnelles.

En physique, il est d'usage courant de faire jouer un rôle privilégié à plusieurs grandeurs, que l'on nomme primaires ou fondamentales, et de définir pour elles des unités de mesures.

Les unités de mesure pour les autres quantités physiques, nommées unités secondaires, sont alors exprimées en fonction des unités primaires.

La relation définissant une unité secondaire en fonction des unités primaires est appelée dimension de cette unité.

Ces dimensions d'unités secondaires résultent de certaines définitions ou lois physiques. Elles constituent un code qui renseigne sur la façon dont varie la valeur numérique d'une grandeur quand les unités fondamentales sont modifiées.

Il existe une certaine liberté, sur le plan des principes, pour le choix des grandeurs primaires et des relations physiques conduisant aux dimensions des autres grandeurs. Néanmoins, ce choix doit être tel que :

- les rapports de mesure des grandeurs primaires doivent pouvoir être arbitraires ;
- les grandeurs primaires, et elles seules, doivent pouvoir permettre de déterminer les rapports de mesure des autres grandeurs secondaires.

Cela implique que le choix d'une part des grandeurs primaires, et d'autre part des relations physiques conduisant aux dimensions des unités secondaires, soient liés.

Les grandeurs primaires usuellement choisies en mécanique des fluides sont :

Grandeur	Unité SI		Dimension
Longueur	[m]	mètre	L
Temps	[s]	seconde	T
Masse	[kg]	kilogramme	M
Température	[K]	Kelvin	
	[°C]	degré Celsius	

Tableau 4: Grandeurs primaires

Des exemples d'unités secondaires sont

Grandeur	Unité SI		Dimension
Section	$[m^2]$		$[L^2]$
Volume	$[m^3]$		$[L^3]$
Vitesse	$[m.s^{-1}]$		$[LT^{-1}]$
Accélération	$[m.s^{-2}]$		$[LT^{-2}]$
Débit	$[m^3.s^{-1}]$		$[L^3T^{-1}]$
Pression	$[Pa] = [N.m^{-2}]$	Pascal	$[ML^{-1}T^{-2}]$
	$[bar]$	bar ($1bar = 10^5 Pa$)	
	$[m]$	mètre de colonne de liquide	
Angle	$[^\circ]$	Degré	$[-]$
	$[-]$	Radians	
Vitesse angulaire	$[s^{-1}]$		$[T^{-1}]$
Force	$[N] = [kg.m.s^{-2}]$	Newton	$[MLT^{-2}]$
Energie (ou travail)	$[J] = [N.m]$	Joule	$[ML^2T^{-2}]$
Puissance	$[W] = [J.s^{-1}]$	Watt	$[ML^2T^{-3}]$
	$[CV]$	Chevaux ($1CV = 735W$)	
Masse volumique	$[kg.m^{-3}]$		$[ML^{-3}]$
Viscosité dynamique	$[PI] = [kg.m^{-1}.s^{-1}]$	Poiseuille	$[ML^{-1}T^{-1}]$
Viscosité cinématique	$[m^2.s^{-1}]$		$[M^2L^{-1}]$

Tableau 5: Grandeurs secondaires

3. Dimensions des grandeurs et équations

Les phénomènes physiques sont exprimés mathématiquement à l'aide d'équations.

Toute équation de physique mathématique peut être considérée comme une somme de termes, chacun fonction des mesures d'une ou plusieurs quantités. Or il faut que ces équations aient une forme indépendante du système d'unités que l'on adopte, et donc elle doit être homogène par rapport à chacune des grandeurs primaires définissant le système d'unité, c'est à dire dimensionnellement homogène. En effet, si dans un problème de mécanique des fluides par exemple, on multiplie par α les mesures des longueurs, celles des masses par β et celles des temps par γ , il faut que les relations décrivant le phénomène se maintiennent.

En ce qui concerne les multiplicateurs des unités secondaires, ils seront des produits des multiplicateurs de ces unités fondamentales, élevés à des puissances dont les exposants sont définis par des formules dimensionnelles de ces grandeurs.

En d'autres mots, si la valeur numérique d'un terme de l'équation dépend de la grandeur de l'une des unités fondamentales, tous les autres en dépendront de la même façon. Si la grandeur de l'unité est changée, chaque terme sera modifié dans le même rapport et l'équation restera valable.

Il est évident qu'il doit en être ainsi puisque le phénomène physique existe indépendamment de la valeur des unités dont on fait usage. Donc l'équation, qui ne fait que traduire ce phénomène, doit être telle qu'en y substituant aux lettres les nombres décrivant les résultats des observations, une identité existe toujours. Une telle équation est dite **complète**.

4. La similitude

4.1. Généralités et définitions

Considérons un système I caractérisé par exemple par les équations f et g suivantes :

$$I \text{ défini par } \begin{cases} f(x, y, a, b, c, d) \\ g(x, y, a, b, c, d) \end{cases} \quad (4.1)$$

où a, b, c et d sont les données suffisantes pour définir complètement le phénomène physique et où x et y sont les inconnues.

S'il existe des facteurs x^*, y^*, a^*, b^*, c^* et d^* tels que le système II

$$II \text{ défini par } \begin{cases} f(x^*x, y^*y, a^*a, b^*b, c^*c, d^*d) \\ g(x^*x, y^*y, a^*a, b^*b, c^*c, d^*d) \end{cases} \quad (4.2)$$

soit vérifié en même temps que le système I pour toute solution de I , cela définit une similitude dans le domaine physique considéré.

Les facteurs x^*, y^*, a^*, b^*, c^* et d^* , appelés facteurs d'échelles, ne peuvent en général pas tous être choisis arbitrairement. Ils doivent satisfaire à des relations (entre eux, et entre eux seuls puisqu'ils sont indépendants de x, y, a, b, c et d) appelées relations de similitude.

$$\varphi_i(x^*, y^*, a^*, b^*, c^*, d^*) = 0 \quad (4.3)$$

Ce sont les conditions pour que tout ensemble (x, y, a, b, c, d) satisfaisant à I , satisfasse à II , le nombre et la forme des φ_i dépendant des expressions f et g .

La similitude est alors la transformation qui fait passer du système (x, y, a, b, c, d) au système $(x^*x, y^*y, a^*a, b^*b, c^*c, d^*d)$ dans le domaine physique considéré.

Le nombre de degrés de liberté dans la similitude est le nombre des échelles que les relations φ_i laissent arbitraires.

4.2. Relations de similitude

Les relations de similitude se répartissent en deux catégories, étant donné que dans tout problème physique, il faut distinguer données et inconnues.

Il est possible de résoudre le système des relations de similitudes (4.3) par rapport aux échelles des inconnues. Le système I équivaut alors à

$$\begin{aligned} x^* &= \psi_1(a^*, b^*, c^*, d^*) \\ y^* &= \psi_2(a^*, b^*, c^*, d^*) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \psi_3(a^*, b^*, c^*, d^*) &= 0 \\ \psi_4(a^*, b^*, c^*, d^*) &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Les relations (4.5), du fait qu'elles ne contiennent que les échelles de données, expriment des conditions de compatibilité qu'il est nécessaire de remplir pour pouvoir réaliser des phénomènes semblables, ce sont des **conditions de similitude**.

Supposons qu'à un système de données (a, b, c, d) correspond un phénomène unique. a^*, b^*, c^* et d^* étant des échelles remplissant les conditions de similitude (4.5), la solution (x', y') du système

$$\begin{cases} f(x', y', a^*a, b^*b, c^*c, d^*d) \\ g(x', y', a^*a, b^*b, c^*c, d^*d) \end{cases} \quad (4.6)$$

représente le phénomène correspondant aux données (a^*a, b^*b, c^*c, d^*d) .

C'est aussi le phénomène représenté par

$$\begin{cases} f(x^*x, y^*y, a^*a, b^*b, c^*c, d^*d) \\ g(x^*x, y^*y, a^*a, b^*b, c^*c, d^*d) \end{cases} \quad (4.7)$$

où (x, y) est la solution de I (données a, b, c, d) et où x^* et y^* sont définis par (4.4). On a donc les relations

$$\begin{cases} x' = x^*x \\ y' = y^*y \end{cases} \quad (4.8)$$

Les relations (4.4) expriment donc simplement quelles échelles x^* et y^* il faut adopter pour passer des inconnues (x, y) dans un système de données (a, b, c, d) aux inconnues (x', y') pour le même phénomène dans un autre système de données (a^*a, b^*b, c^*c, d^*d) .

Elles apparaissent donc non pas comme des conditions de similitude supplémentaires, mais comme des conséquences physiques des relations (4.5).

5. Détermination des lois de similitude par méthode directe

5.1. Définition

La méthode directe se base sur l'exploitation des équations régissant la mécanique des fluides. Partant des équations régissant le phénomène étudié, plusieurs nombres importants peuvent être mis en évidence par une adimensionalisation des équations.

La similitude par méthode directe conservera ainsi un ou plusieurs de ces nombres adimensionnels pour déterminer les caractéristiques du modèle réduit sur base du prototype. Le choix de ces nombres sans dimension est fonction de leurs rôles important dans le phénomène étudié.

A similitude choisie, elle permet également de juger de l'importance de l'erreur commise par la non-constance d'un de ces nombres adimensionnels entre le prototype et le modèle réduit.

5.2. Mise en évidence de nombres adimensionnels

Sur base du système général d'équations de la mécanique des fluides, il est possible de choisir différentes grandeurs caractéristiques du problème.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\xi \varepsilon'_{ij} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon'_{ij}) \end{array} \right. \quad (4.9)$$

- L_c : une longueur caractéristique (ex. dimension d'un corps solide, diamètre d'une conduite, ...)
- U_c : une vitesse caractéristique (ex. la vitesse d'approche, la vitesse moyenne, ...)
- t_c : un temps caractéristique
- Δp_c : une variation caractéristique de pression
- ρ_c : une masse volumique de référence
- g : la gravité (force volumique de référence)
- μ_c : une viscosité de référence

Il est ainsi possible de remplacer les variables indépendantes x , y , z et t par les variables adimensionnelles :

$$\bar{x} = \frac{x}{L_c} \quad \bar{y} = \frac{y}{L_c} \quad \bar{z} = \frac{z}{L_c} \quad \bar{t} = \frac{t}{t_c} \quad (4.10)$$

et les variables dépendantes u , v , w , ρ , F , p , μ et ξ par les variables adimensionnelles :

$$\bar{u} = \frac{u}{U_c} \quad \bar{v} = \frac{v}{U_c} \quad \bar{w} = \frac{w}{U_c} \quad \bar{p} = \frac{p}{\Delta p_c} \quad (4.11)$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_c} \quad \bar{F}_i = \frac{F_i}{g} \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_c} \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{\mu_c}$$

Les différents termes de l'équation de la conservation de la masse s'écrivent ainsi, où les grandeurs caractéristiques constantes peuvent sans souci sortir des termes de dérivées :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial (\rho_c \bar{\rho})}{\partial (t_c \bar{t})} = \frac{\rho_c}{t_c} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial (\rho_c U_c \bar{\rho} \bar{u}_j)}{\partial (L_c \bar{x}_j)} = \frac{\rho_c U_c}{L_c} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_j)}{\partial \bar{x}_j} \quad (4.13)$$

Ce qui forme finalement :

$$\frac{L_c}{U_c t_c} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_j)}{\partial \bar{x}_j} = 0 \quad (4.14)$$

En procédant de même pour chaque terme des équations de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = \frac{\partial (\rho_c U_c \bar{\rho} \bar{u}_i)}{\partial (t_c \bar{t})} = \frac{\rho_c U_c}{t_c} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_i)}{\partial \bar{t}} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial (\rho_c U_c^2 \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial (L_c \bar{x}_j)} = \frac{\rho_c U_c^2}{L_c} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial \bar{x}_j} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial (\Delta p_c \bar{p})}{\partial (L_c \bar{x}_i)} = \frac{\Delta p_c}{L_c} \frac{\partial (\bar{p})}{\partial \bar{x}_i} \quad (4.17)$$

$$\Upsilon = \frac{U_c \mu_c}{L_c^2} \bar{\Upsilon} \quad (4.18)$$

Pour aboutir à la forme adimensionnelle :

$$\frac{\rho_c U_c}{t_c} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_i)}{\partial \bar{t}} + \frac{\rho_c U_c^2}{L_c} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial \bar{x}_j} = g \rho_c \bar{\rho} \bar{F}_i - \frac{\Delta p_c}{L_c} \frac{\partial (\bar{p})}{\partial \bar{x}_i} + \frac{\mu_c U_c}{L_c^2} \bar{\Upsilon} \quad (4.19)$$

Le système finalement retenu est composé de (4.14) et de (4.19) multiplié par $\frac{L_c}{\rho_c U_c^2}$ pour que le coefficient devant les dérivées partielles temporelles soit identique.

$$\begin{cases} \frac{L_c}{U_c t_c} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u}_j)}{\partial \bar{x}_j} = 0 \\ \frac{L_c}{U_c t_c} \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial \bar{x}_j} = \frac{gL_c}{U_c^2} \bar{\rho} \bar{F}_i - \frac{\Delta p_c}{\rho_c U_c^2} \frac{\partial(\bar{p})}{\partial \bar{x}_i} + \frac{\nu_c}{U_c L_c} \bar{\gamma} \end{cases} \quad (4.20)$$

(4.20) fait apparaître d'importants nombres sans dimension qui portent tous le nom d'un savant renommé :

$$\begin{cases} \text{Str} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u}_j)}{\partial \bar{x}_j} = 0 \\ \text{Str} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial \bar{x}_j} = \frac{1}{\text{Fr}^2} \bar{\rho} \bar{F}_i - \text{Eu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{u}_i \end{cases} \quad (4.21)$$

5.3. Nombre de Strouhal

Le nombre de Strouhal (Str) est le rapport du temps d'advection et du temps caractéristique de l'instationnarité :

$$\text{Str} = \frac{L_c}{U_c t_c} = \frac{\overbrace{\frac{L_c}{U_c}}^{\text{temps d'advection}}}{t_c} = f \frac{L_c}{U_c} \quad (4.22)$$

Il permet donc de caractériser l'instationnarité du mouvement, notamment tourbillonnaire (f est la fréquence d'émission des tourbillons). Si le nombre de Strouhal Str est nettement inférieur à l'unité, l'écoulement est dit quasi-stationnaire.

5.4. Nombre de Froude

Le nombre de Froude (Fr) est le rapport des contraintes liées à l'inertie aux contraintes des forces de volume (pesanteur, ...) :

$$\text{Fr}^2 = \frac{\rho U_c^2}{\rho g L_c} \quad (4.23)$$

Son utilité est la plus marquée en hydraulique à surface libre ou en présence de deux fluides non miscibles.

5.5. Nombre d'Euler

Le nombre d'Euler (Eu) caractérise le rapport entre la pression et les contraintes liées à l'inertie :

$$\text{Eu} = \frac{\Delta P}{\rho_c U_c^2} \quad (4.24)$$

Il est utile dans la caractérisation des pertes dans un fluide en mouvement. Il peut être ainsi dérivé dans d'autres formulations telles que le coefficient de pression (C_p), (abondamment employé dans les problèmes de traînée, de portance et de couches limites) ou encore le nombre de cavitation (σ_c) pour des problèmes de turbomachines :

$$C_p = 2Eu = \frac{\Delta P}{\frac{\rho_c U_c^2}{2}} \quad (4.25)$$

$$\sigma_c = \frac{p - p_{\text{vapeur saturante}}}{2\rho_c U_c^2} \quad (4.26)$$

5.6. Nombre de Reynolds

Peut-être le plus connu en mécanique des fluides, il caractérise le rapport entre les contraintes liées à l'inertie et les contraintes visqueuses.

$$\text{Re} = \frac{U_c L_c}{\nu} = \frac{\rho U_c^2}{\mu \frac{U_c}{L_c}} \quad (4.27)$$

C'est ainsi une image qualitative du rapport entre le transfert par convection et le transfert par diffusion de la quantité de mouvement dans l'écoulement.

Comme cela sera expliqué en détails dans le chapitre consacré à la turbulence, il caractérise la nature du régime de l'écoulement. Un régime d'écoulement sera ainsi qualifié de laminaire si son Reynolds est inférieur à 2000, de transitoire entre 2000 et 3000 et de turbulent pour des valeurs supérieures.

Les écoulements dont la valeur du Reynolds est nettement inférieure à l'unité, où les tensions visqueuses sont très prépondérantes, ont été étudiés très largement par Stokes qui leur a donné son nom.

6. Détermination des lois de similitude par analyse dimensionnelle

6.1. Définition

L'analyse dimensionnelle, à la base de la théorie de la similitude, s'appuie sur la simple considération des dimensions composant chacune des grandeurs impliquées dans le phénomène étudié.

Par elle même, l'analyse dimensionnelle fournit des relations qualitatives plutôt que quantitatives, mais lorsqu'elle est combinée avec un procédé expérimental, elle peut livrer des résultats quantitatifs et des équations générales très précises.

Dans le domaine de l'ingénieur, ses applications les plus importantes sont :

- l'établissement d'équations liant les variables d'un problème donné ;
- la représentation systématique des résultats d'un programme expérimental et la réduction du nombre de variables à prendre en considération ;
- l'établissement des principes de dimensionnement, d'opération et d'interprétation de modèles.

6.2. Théorème π de Vaschy-Buckingham

6.2.1. Énoncé

Ce théorème est un des plus beaux outils de l'analyse dimensionnelle. Il permet de mettre immédiatement en évidence les produits sans dimension qui règlent la similitude, produit qui par définition ne changent pas lorsque l'on change les échelles des unités fondamentales.

Ce théorème peut être appliqué à tout phénomène physique, mécanique thermique, électrique,... dont les lois peuvent s'exprimer par des relations mathématiques. Il s'énonce de la manière suivante :

« Toute relation dimensionnellement homogène entre n grandeurs physiques $f(A, B, C, \dots, X) = 0$ entraîne l'existence d'une autre relation $\varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-N}) = 0$ entre $n-N$ grandeurs sans dimension qui sont des produits distincts de puissances des grandeurs A, B, C, \dots, X de la forme $A^\alpha B^\beta \dots X^\varpi$. »

N est l'ordre le plus élevé du déterminant non nul que contient la matrice dimensionnelle des grandeurs A, B, C, \dots, X . Il est le plus souvent égal au nombre d'unités fondamentales dont dépendent A, B, C, \dots, X .

Tout l'intérêt du théorème des π est donc de réduire le nombre d'arguments de la relation qui existe entre les différentes grandeurs intervenant dans un problème déterminé.

6.2.2. Démonstration

Soit une relation dimensionnellement homogène entre n grandeurs physiques

$$f(A, B, C, \dots, X) = 0 \quad (4.28)$$

traduisant une loi physique.

A, B, C, \dots, X dérivent de m unités fondamentales, à savoir M, L, T, \dots

Leurs dimensions sont

$$\begin{aligned}
 [A] &= M^a L^{a'} T^{a''} \dots \\
 [B] &= M^b L^{b'} T^{b''} \dots \\
 &\dots \\
 [X] &= M^x L^{x'} T^{x''} \dots
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

La matrice dimensionnelle des variables peut ainsi être dressée :

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & A & B & C & \dots & X \\
 \hline
 M & a & b & c & \dots & x \\
 L & a' & b' & c' & \dots & x' \\
 T & a'' & b'' & c'' & \dots & x'' \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots
 \end{array} \tag{4.30}$$

A partir de la relation (4.28), il est possible d'établir une relation entre les mesures des n grandeurs considérées :

$$f\left(\frac{A}{[A]}, \frac{B}{[B]}, \frac{C}{[C]}, \dots, \frac{X}{[X]}\right) = 0 \tag{4.31}$$

Au moyen des relations (4.29), ou plus exactement au moyen de certaines d'entre elles, on peut déduire N unités fondamentales en fonction de celles de N des grandeurs initiales E, F, G, \dots à condition qu'elles soient linéairement indépendantes

$$\left. \begin{aligned}
 [E] &= M^e L^{e'} T^{e''} \dots \\
 [F] &= M^f L^{f'} T^{f''} \dots \\
 &\dots \\
 [G] &= M^g L^{g'} T^{g''} \dots
 \end{aligned} \right\} N \text{ relations} \tag{4.32}$$

Il l'est si N représente l'ordre le plus élevé du déterminant non nul que contient la matrice (4.30). N est au maximum égal au nombre d'unités fondamentales.

Les dimensions de A, B, \dots, X peuvent alors s'exprimer en fonction de celles de E, F, G, \dots soit :

$$\begin{aligned}
 [A] &= [E]^\alpha [F]^{\alpha'} [G]^{\alpha''} \dots \\
 [B] &= [E]^\beta [F]^{\beta'} [G]^{\beta''} \dots \\
 &\vdots \\
 [E] &= [E] \\
 [F] &= [F] \\
 [G] &= [G] \\
 &\vdots \\
 [X] &= [E]^\chi [F]^{\chi'} [G]^{\chi''} \dots
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

De nouvelles unités fondamentales sont ensuite choisies qui sont précisément les mesures de E , F , G , ... soit les $[E]$, $[F]$, $[G]$, ...

De cette manière, les mesures de ces grandeurs figurant dans l'équation (4.31) deviennent égales à l'unité :

$$\frac{E}{[E]} = \frac{F}{[F]} = \frac{G}{[G]} = \dots = 1 \quad (4.34)$$

Dans ce nouveau système d'unités, les mesures pour A , B , ... deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{A}{[A]} &= \frac{A}{[E]^\alpha [F]^{\alpha'} [G]^{\alpha''} \dots} \\ \frac{B}{[B]} &= \frac{B}{[E]^\beta [F]^{\beta'} [G]^{\beta''} \dots} \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.35)$$

Le remplacement des nouvelles mesures dans l'équation (4.31) donne, tenant compte de (4.34) :

$$f \left(\underbrace{\frac{A}{E^\alpha F^{\alpha'} G^{\alpha''}}}_{\pi_1}, \underbrace{\frac{B}{E^\beta F^{\beta'} G^{\beta''}}}_{\pi_2}, \dots, \underbrace{\frac{X}{E^\chi F^{\chi'} G^{\chi''}}}_{\pi_{n-N}} \right) = 0 \quad (4.36)$$

soit une relation entre $n-N$ grandeurs sans dimension.

6.2.3. Utilisation courante

C'est une première manière de déterminer les π_i correspondant à une loi donnée. Généralement, on opère comme suit, en établissant la matrice dimensionnelle :

	A	B	C	\dots	X
M	a	b	c	\dots	x
L	a'	b'	c'	\dots	x'
T	a''	b''	c''	\dots	x''
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\dots	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\dots	\cdot
Exposants	α	β	γ	\dots	χ

(4.37)

Un exposant est attribué à chacune des grandeurs du problème et la forme générale d'un nombre sans dimension est écrite :

$$\pi = A^\alpha B^\beta C^\gamma \dots X^\chi \quad (4.38)$$

Pour que ce nombre soit effectivement sans dimension, il faut que les égalités suivantes soient respectées :

$$\begin{aligned} a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots + x\chi &= 0 \\ a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + \dots + x'\chi &= 0 \\ a''\alpha + b''\beta + c''\gamma + \dots + x''\chi &= 0 \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.39)$$

Ce système indéterminé comprend N équations linéairement indépendantes et il est ainsi possible d'exprimer N valeurs parmi les n en fonction des autres.

Pour résoudre ce problème, il faut donc imposer $n-N$ valeurs des $\alpha, \beta, \dots, \chi$. Ce choix est arbitraire. La formule la plus simple est dès lors de constituer le premier π en imposant une de ces valeurs non nulle et toutes les autres nulles. Le second sera constitué en s'imposant une autre de ces valeurs non nulle et ainsi de suite. $n-N$ nombres π sont donc ainsi constitués.

Il peut être montré aisément que toutes les autres solutions conduisent à des combinaisons résultant du produit des π obtenus élevés à des puissances quelconques.

6.2.4. Application du théorème π : puissance d'une explosion nucléaire

Il s'agit d'un exemple célèbre d'application de l'analyse dimensionnelle réalisée par Taylor en 1950. Après la seconde guerre mondiale, les autorités américaines ont levé le « secret défense » concernant des séries de clichés d'une explosion atomique car elles les jugeaient inexploitable par des puissances étrangères. Pourtant, Taylor par un simple raisonnement dimensionnel parvint à calculer la puissance de l'explosion (donnée qui, elle, était restée confidentielle) !



Figure 2.3 : extrait des séries de photographies d'une explosion atomique photographiée par Mack.

D'après Taylor, l'effet premier d'une explosion atomique est l'onde de pression précédant la boule de feu et dont l'ordre de grandeur est de plusieurs centaines d'atmosphères. Quatre paramètres gouvernent ce processus : l'énergie déployée E [$\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$], la masse volumique de l'air ρ [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$], le rayon r_f de la boule [m], et le temps t depuis l'explosion [s].

On a 4 variables et 3 unités fondamentales. On peut donc former un nombre adimensionnel :

$$\pi = \frac{r_f}{E^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}} \rho^{\frac{1}{5}}} \quad (4.40)$$

Pour une explosion donnée, ce nombre doit être constant, ce qui implique que : $r_f \propto E^{1/5} t^{2/5}$ au cours du temps. La connaissance expérimentale de la relation $r_f(t)$ a permis à Taylor d'estimer l'énergie libérée par l'explosion atomique.

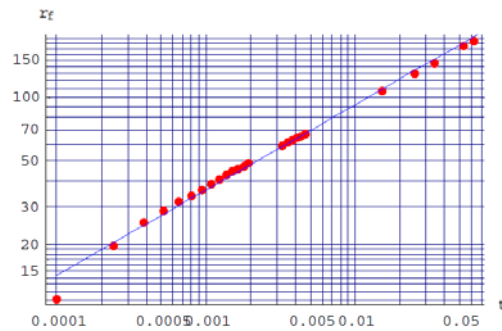


Figure 2.4 : comparaison entre la loi de similitude de Taylor et le rayon r calculé à partir des séries de photographies d'une explosion atomique prises par Mack.

7. Utilisation pratique des similitudes

7.1. Généralités

Dans les applications pratiques, on cherche souvent à trouver, sans passer par une analyse détaillée du problème, certaines relations qui doivent être satisfaites par l'ensemble des grandeurs intervenant dans le phénomène étudié.

En général, la filière suivante est suivie :

- listage des quantités que supposées intervenir dans la description du phénomène physique étudié ;
- écriture des formules dimensionnelles ;
- formulation, avec ces quantités, des produits sans dimension.

7.2. Choix des variables à considérer

Les variables à considérer dans les équations sont de deux espèces :

D'abord les variables physiques, qui changent de valeur lorsque les conditions du phénomène changent ou lorsque varie la grandeur des unités fondamentales.

Ensuite d'autres arguments, qui restent constants lorsque le système physique change, mais dont la grandeur varie lorsque les unités fondamentales sont modifiées. Ce sont les constantes dimensionnelles. Elles sont l'expression d'une relation physique générale, caractéristique de tous les phénomènes d'un groupe donné. Par exemple : l'accélération de la pesanteur, la vitesse de la lumière.

Une des questions les plus délicates que pose l'application d'un raisonnement dimensionnel à des problèmes divers est celle de savoir quelles sont exactement les variables qu'il faut y faire intervenir.

Ainsi, pour prendre un exemple, on veut déterminer la période d'oscillation d'une gouttelette. Il est clair qu'elle dépend de la tension superficielle et de la densité du liquide ainsi que du rayon de courbure de la goutte. La structure atomique, qui certainement a une influence, n'a pas été négligée, car les forces atomiques ont été introduites globalement, sous le vocable de la tension superficielle. D'autre part, il pourrait sembler étrange de ne pas faire intervenir la viscosité, ni la compressibilité du liquide. C'est l'expérience seule qui guide et indique les grandeurs en jeu, celles qui sont essentielles et celles qui peuvent être laissées de côté, et dans quelles limites il est permis de le faire. C'est par instinct, ou plutôt par une préscience acquise par un long passé d'expérience, s'étendant sur de nombreuses générations, qu'il est possible de discerner un problème mécanique ou thermodynamique d'un problème électrique et que les différentes grandeurs qui y interviennent sont identifiées.

Lors d'une étude d'un problème de mécanique par la voie analytique, l'expérience indique les variables qu'il faut envisager, tout comme lorsqu'on applique un raisonnement dimensionnel. Toutes les équations du mouvement sont écrites de manière telle que l'on puisse valablement supposer que la solution représente correctement le comportement du système qui est examiné. L'analyse mathématique, pas plus que l'analyse dimensionnelle, ne peut établir des relations que si les données mêmes du problème sont posées. Toutes deux permettent de transformer des équations ; ce sont des outils, des méthodes de travail.

L'analyse dimensionnelle est essentiellement une analyse d'une analyse, parce qu'elle donne certaines informations sur le caractère nécessaire du résultat. Son résultat ne sera d'ailleurs jamais aussi complet que celui découlant d'une étude analytique. Seulement cette méthode, qui ne demande pas qu'on résolve les équations de mouvement, ni même qu'on les écrive, permet de jeter quelques clartés sur des cas très complexes, dont l'analyse mathématique est pratiquement impossible.

7.3. Application du théorème π : force de traînée

On veut calculer la force dite de traînée exercée par un fluide newtonien (incompressible) sur une particule sphérique de diamètre $2r$. La force se calcule comme :

$$F = \int_A \vec{T} \cdot \vec{n} dA \quad (4.41)$$

Avec $\vec{T} = -p\vec{I} + 2\mu\vec{D}$, où p est la pression, μ la viscosité dynamique et \vec{D} le tenseur des taux de déformation. C'est un problème complexe puisqu'il faudrait résoudre en même temps les équations de Navier-Stokes pour décrire la phase fluide animée d'une vitesse \vec{U} :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{U} = 0 \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \vec{U}) = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + 2\mu \nabla \cdot \overline{\overline{D}} \end{cases} \quad (4.42)$$

Et l'équation de quantité de mouvement pour la particule :

$$m_p \frac{d\vec{U}_p}{dt} = m_p \vec{g} + \vec{F} \quad (4.43)$$

Avec m_p la masse de la particule et \vec{U}_p sa vitesse.

Les conditions aux limites sont de plus : $\vec{U} = \vec{U}_p + \omega \times \vec{r}$ sur la surface A de la particule, avec ω la vitesse de rotation de la particule donnée par l'équation de conservation du moment cinétique :

$$J_p \frac{d\omega}{dt} = \int_A \vec{r} \times (\overline{\overline{Tn}}) dA \quad (4.44)$$

Avec $J_p = 2mr^2 / 5$, le moment d'inertie.

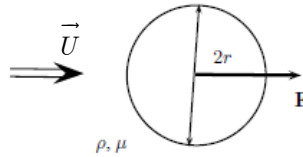


Figure 4.1 : Essai sur modèle réduit d'un coursier

5 variables existent : la force F que l'on cherche à calculer, la viscosité dynamique μ , la masse volumique ρ , le rayon de la particule r , et sa vitesse relative par rapport au fluide :

$$\vec{U}_r = \left| \vec{U}_p - \vec{U} \right| \quad (4.45)$$

La première chose à faire est de déterminer les unités de ces grandeurs physiques dans le système international en ne faisant appel qu'aux grandeurs fondamentales, à savoir :

- unité de distance : le mètre [m] ;
- unité de temps : la seconde [s] ;
- unité de masse : la masse [kg].

Les unités ou dimensions physiques sont reportées dans le tableau suivant où la valeur numérique représente l'exposant.

	F	u	ρ	μ	r
kg	1	0	1	1	0
m	1	1	-3	-1	1
s	-2	-1	0	-1	0

(4.46)

On recherche la force F en fonction de r , μ , u et ρ . C'est-à-dire $F = \phi(u, \rho, \mu, r)$ s'il existe une relation univoque ou bien, de façon plus générale $\Psi(F, u, \rho, \mu, r) = 0$. Il est évident, sans même

faire de physique, que seules des fonctions respectant l'homogénéité des dimensions peuvent être choisies.

Par exemple, $F = u\rho\mu r$ n'est pas possible car elle n'est pas homogène : $[\text{kg m s}^{-2}] \neq [\text{kg}^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}]$. Il faut donc que la combinaison des différentes unités donne un résultat cohérent du point de vue dimensionnel. L'analyse dimensionnelle n'est, d'une certaine façon, que la recherche des combinaisons possibles entre variables physiques respectant les contraintes d'homogénéité dimensionnelle.

Quelles sont les possibilités ? Pour cela, recherchons les paramètres a , b , c , d et e permettant de former des combinaisons homogènes du point de vue des dimensions physiques. Pour une relation générale de la forme $\Psi(F, u, \rho, \mu, r) = 0$, les combinaisons des unités doivent vérifier :

$$[F]^a [u]^b [\rho]^c [\mu]^d [r]^e = 0 \quad (4.47)$$

soit, en se servant des unités des variables :

$$\begin{aligned} a + c + d &= 0 \\ a + b - 3c - d + e &= 0 \\ -2a - b - d &= 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Il y a donc 3 équations pour 5 inconnues ; 2 inconnues doivent donc être considérées comme des variables libres (ou ajustables). Prenons par exemple a et d comme variables libres¹² et déterminons les autres paramètres b , c et e :

$$b = -(2a + d), c = -(a + d), e = b \quad (4.49)$$

Une implication de cette analyse est également que la relation générale $\Psi(F, u, \rho, \mu, r) = 0$ de dimension 5 peut en fait se réduire à une relation de dimension 2 (puisque l'on n'a que 2 variables libres a et d) que l'on note génériquement sous la forme $\Psi(\pi_1, \pi_2) = 0$. Une infinité de choix existe pour les valeurs de a et d , mais deux critères doivent nous aider :

- choisir des nombres avec une signification physique ;
- choisir des nombres indépendants¹³.

Pour π_1 , considérons par exemple $a=1$ et $d=0$, les autres paramètres valent alors $b=-2$, $c=-1$, $e=-2$, soit :

$$\pi_1 = \frac{F}{\rho r^2 u^2} \quad (4.50)$$

¹² Ce choix n'est justifié ici que par notre désir de disposer de deux nombres sans dimension, l'un relatif à la force de traînée, l'autre à la viscosité.

¹³ Si (a, d) représente les coordonnées d'un vecteur de dimension 2, alors on doit choisir des vecteurs non colinéaires. Par exemple le choix $(a, d)=(0, 1)$ et $(a, d)=(1, 0)$ est correct ; le choix $(a, d)=(0, 1)$ et $(a, d)=(0, 2)$ est incorrect.

Pour π_2 , considérons par exemple $a=0$ et $d=1$ (les nombres sont ainsi certainement indépendants), les autres paramètres valent alors $b=-1$, $c=-1$, $e=-1$, soit :

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho r u} = 2 \frac{1}{\text{Re}} \quad (4.51)$$

Le nombre de Reynolds est ainsi mis en évidence. Vu la longueur de référence (r), il est appelé ici *Reynolds particulière*, $\text{Re} = \frac{2ru}{\nu}$ avec $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ la viscosité cinématique.

Toute fonction de π_1 et/ou π_2 peut être utilisée pour définir des nombres sans dimension. Ainsi, arbitrairement du point de vue mathématique (mais cela a un sens physique), on définit les nombres sans dimension utiles pour notre problème :

$$\pi_1 = \frac{F}{\rho r^2 u^2} \text{ et } \pi_2 = \text{Re} = \frac{2\rho r u}{\nu} \quad (4.52)$$

Attention, la forme exacte de toute formule liant π_1 et π_2 dépend de la définition précise de ces nombres ; il convient de vérifier à chaque fois comment ils sont définis (il n'est pas ainsi rare que l'on définisse C_d comme $C_d = \frac{F}{\rho r^2 u^2}$ sans facteur 1/2 au dénominateur).

La relation recherchée doit nécessairement s'écrire sous la forme : $\Psi(\pi_1, \pi_2) = 0$, ou encore :

$$\frac{F}{\frac{1}{2} \pi \rho r^2 u^2} = \phi(\text{Re}) \quad (4.53)$$

Dans ce cas, ϕ est appelé le coefficient de traînée et est le plus souvent noté C_d . F est la force de traînée¹⁴. Les valeurs remarquables de ce coefficient seront démontrées et expliquées dans d'autres chapitres.

7.4. Modèles réduits hydrodynamiques

Dans les paragraphes suivants, les lettres minuscules désigneront les grandeurs relatives au modèle réduit, celles en majuscules les grandeurs relatives au prototype.

Dans toute étude sur modèle réduit, les résultats obtenus sur le modèle doivent correspondre à ceux que l'on aurait sur le prototype afin de pouvoir faire des parallèles. Plusieurs types de similitude mécanique existent :

¹⁴ Il existe d'autres types de forme d'interactions entre un fluide et une particule qui seront étudiées dans la suite du cours.

- la similitude géométrique : les formes des corps étudiés ou des limites de l'écoulement doivent être semblables à une échelle bien définie.

$$\frac{l}{L} = e_L = \text{constante} \quad (4.54)$$

- la similitude cinématique : les vitesses ou accélérations de l'écoulement doivent être semblables à l'échelle du prototype et à celle du modèle.

$$\frac{u}{U} = \frac{l/t}{L/T} = e_V = \text{constante} \quad , \quad \frac{a}{A} = \frac{l/t^2}{L/T^2} = e_a = \text{constante} \quad (4.55)$$

- la similitude dynamique : les efforts définissant l'écoulement doivent s'exercer dans le prototype et le modèle dans les mêmes proportions.

$$\frac{f}{F} = \frac{m a}{M A} = \frac{\rho l^3 l/t^2}{\Gamma L^3 L/T^2} = e_F = \text{constante} \quad (4.56)$$

Pour que les deux écoulements soient semblables, les deux conditions de similitude géométrique et dynamique sont nécessaires.

Dans le cas des modèles réduits hydrodynamiques, les liquides utilisés (principalement de l'eau), sont des liquides visqueux, incompressibles et pesants.

Les forces régissant les écoulements sont donc de trois types :

- les forces d'inertie ;
- les forces de pesanteur, conditionnant directement les forces de pression ;
- les forces de viscosité.

Les autres forces (tensions superficielles, Coriolis, ..) peuvent généralement être négligées.

7.5. Courbe maîtresse

En ingénierie, quand on fait des essais en laboratoire ou bien des simulations, il est fréquent de tracer la variation d'un paramètre du problème en fonction d'un autre ou de plusieurs autres. On obtient alors des réseaux de courbes qu'il est plus ou moins difficile d'interpréter ou de synthétiser. Lorsque les courbes expérimentales présentent la même allure, il est possible de jouer sur cette « similitude d'apparence » pour synthétiser l'information sous la forme d'une courbe maîtresse. Cela a pour avantage de faciliter la manipulation des résultats expérimentaux et, éventuellement, d'ouvrir la voie à une analyse physique des phénomènes observés.

Habituellement, le calage de paramètres de cette courbe s'effectue assez simplement avec des programmes comme Mathematica ou Matlab.

8. Lois de similitudes classiques

8.1. Notations et conventions

Les facteurs d'échelles seront désignés par un symbole $*$ associé à la lettre représentant la grandeur.

Dans tous les problèmes, le respect de la similitude géométrique imposera une échelle des longueurs L^* , fixée par l'encombrement acceptable du modèle ou d'autres considérations géométriques de réalisation.

Les cas les plus courants et les lois qui en découlent vont ainsi être présentés. Les forces d'inertie spatiale étant toujours présentes de façon non négligeable, il faut souvent « choisir » entre forces de pesanteur et de frottement.

8.2. Forces d'inertie et de pesanteur

C'est le cas notamment, en général, de tous les systèmes à surface libre, où la pesanteur intervient de façon prépondérante en conditionnant les forces de pressions. Dès que l'écoulement devient turbulent, les forces de viscosité deviennent négligeables.

Il convient dans ce cas de conserver le rapport forces d'inertie / forces de pesanteur qui est caractérisé par le nombre de Froude (4.23).

Par définition, les forces à considérer sont proportionnelle aux produits suivants :

$$\text{Forces d'inertie} \div M \frac{U^2}{L} \quad (4.57)$$

$$\text{Forces de pesanteur} \div Mg \quad (4.58)$$

Compte tenu de (4.57) et (4.58), le rapport à conserver s'écrit

$$\frac{F_i^P}{F_g^P} = \frac{F_i^M}{F_g^M} \Leftrightarrow \frac{M \frac{U^2}{L}}{MG} = \frac{m \frac{u^2}{l}}{mg} \quad (4.59)$$

Si l'on fait intervenir les facteurs d'échelle, (4.59) devient

$$\frac{U^{*2}}{g^* L^*} = 1 \quad (4.60)$$

ce qui revient bien à conserver entre modèle et prototype le nombre de Froude de l'écoulement. Cette condition constitue la célèbre loi de similitude de Reech-Froude.

L'accélération de la pesanteur étant souvent constante pour le modèle et le prototype, la condition à respecter devient

$$\text{Si } g^* = 1 \rightarrow U^* = \sqrt{L^*} \quad (4.61)$$

(4.61) fixe la relation entre échelle des longueurs et échelle des vitesses. Si les fluides utilisés dans le modèle et le prototype ont la même masse volumique ($\rho^*=1$), il est aisé de déduire les facteurs d'échelles suivants :

$$T^* = \frac{L^*}{U^*} = \sqrt{L^*} \quad Q^* = U^* L^{*2} = L^{*5/2} \quad (4.62)$$

$$a^* = \frac{L^*}{T^{*2}} = 1 \quad F^* = \rho^* L^{*3} a^* = L^{*3} \quad (4.63)$$

8.3. Applications de la similitude de Froude:

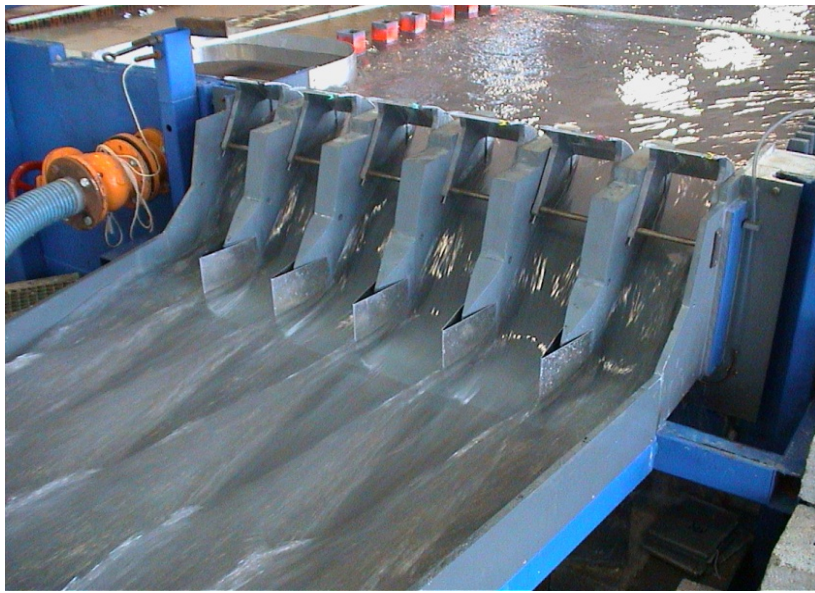


Figure 4.1 : Essai sur modèle réduit d'un coursier



Figure 4.2 : Observatoire des marées à Blankenberge



Figure 4.3 : Essai de houle en canal vitré

8.4. Forces d'inertie et de viscosité

Il convient dans ce cas de respecter le rapport entre forces d'inertie et force de viscosité. Si l'on désigne par ν la viscosité cinématique, les forces de viscosité sont proportionnelles au produit suivant :

$$\text{Forces de viscosité} \propto \nu M \frac{U}{L^2} \quad (4.64)$$

Le rapport à conserver s'écrit donc, en tenant compte de (4.57) :

$$\frac{F_i^P}{F_\nu^P} = \frac{F_i^M}{F_\nu^M} \Leftrightarrow \frac{M \frac{U^2}{L}}{M \nu \frac{U}{L^2}} = \frac{m \frac{u^2}{l}}{m \nu \frac{u}{l^2}} \quad (4.65)$$

En tenant compte des facteurs d'échelle, on doit donc conserver le rapport

$$\frac{L^* U^*}{\nu^*} = 1 \quad (4.66)$$

ce qui revient à conserver entre modèle et prototype le nombre de Reynolds (4.27) de l'écoulement. Cette condition constitue la règle de similitude de Reynolds.

Si les fluides ont la même viscosité cinématique, la relation entre échelle des vitesses et des longueurs vaut :

$$Si \nu^* = 1 \rightarrow U^* = \frac{1}{L^*} \quad (4.67)$$

Cela démontre toute la difficulté à respecter cette similitude en utilisant des fluides identiques sur le modèle et le prototype. Pour un modèle à une échelle géométrique de 1/10, il faut que les vitesses d'écoulement soient 10 fois supérieures à celles attendues sur le prototype.

Application de la similitude de Reynolds : Etude de la trainée

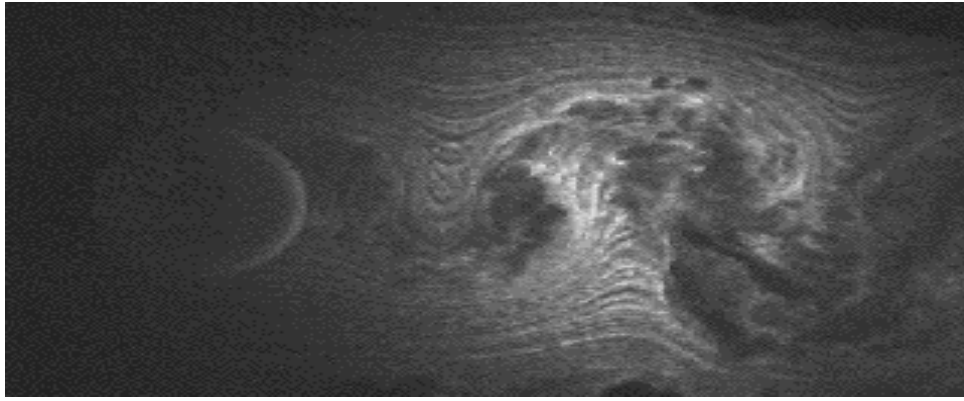


Figure 4.4 : Écoulement autour d'un obstacle

8.5. Forces de pesanteur, d'inertie et de viscosité – Similitude parfaite

La similitude dynamique parfaite entre modèle et prototype impose une conservation à la fois du nombre de Reynolds et du nombre de Froude.

Cela revient à respecter simultanément les relations (4.60) et (4.66), et on a donc pour un fluide unique :

$$L^* = 1 \quad (4.68)$$

Il faut donc que le modèle ait la même taille que le prototype, ce qui revient à dire que la similitude parfaite est impossible sans changer de fluide.

Ceci explique les cas précédents pour lesquels on privilégiait deux forces par rapport à une troisième. Il n'est en effet pas possible que simultanément les efforts d'inertie, de pesanteur (et de pression) et de frottement interagissent dans les mêmes proportions dans le modèle et dans le prototype.

9. Exemples concrets

9.1. Vanne de la chambre à hydrogène VINCI

L'objectif de cette étude en similitude était de déterminer les pertes internes dans de l'hydrogène au passage d'une géométrie particulière de vanne. Pour ce faire, un modèle de la vanne a été testé en faisant passer de l'eau à travers celui-ci et en observant le différentiel de charge entre l'amont et l'aval du modèle. La similitude utilisait donc ici un changement de fluide et de dimensions entre le modèle et le prototype.

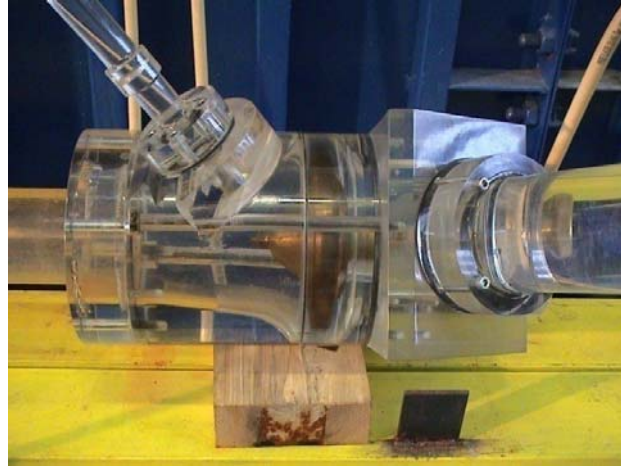


Figure 4.5 : Modèle de vanne VINCI

Les forces de viscosité ayant une importance majeure dans ce cas d'étude, la similitude de Reynolds semblait la plus adaptée. On a donc :

$$\frac{U^* L^*}{\nu^*} = \frac{\rho^* U^* L^*}{\mu^*} = 1 \quad (4.69)$$

Le débit se calculant comme le produit de la vitesse et de la section de passage, l'échelle du débit a alors été déterminée en fonction de (4.69) :

$$\begin{aligned} \frac{U^* L^*}{\nu^*} = 1 &\Rightarrow U^* L^* = \nu^* \\ Q^* &= U^* L^{*2} = \nu^* L^* \end{aligned} \quad (4.70)$$

De même, le coefficient de perte de charge se calcule par :

$$K = \frac{\Delta P}{\rho Q^2} \quad (4.71)$$

L'échelle du coefficient de perte de charge a alors été calculée en fonction de (4.69) :

$$K^* = \frac{\Delta P^*}{\rho^* Q^{*2}} = \frac{\overbrace{\rho^* L^{*3} U^{*2}}^{F^*} / L^*}{\rho^* U^{*2} L^{*4}} = L^{*-4} \quad (4.72)$$

La viscosité cinématique de l'hydrogène et de l'eau étant respectivement de $9.46 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ et de $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, l'échelle de viscosité vaut :

$$\nu^* = \frac{\nu_{\text{modèle}}}{\nu_{\text{prototype}}} = 1.06 \quad (4.73)$$

Le débit maximum des pompes du laboratoire d'essai étant de $0.93 \text{ m}^3/\text{s}$ et le débit à étudier sur le prototype étant de $0.731 \text{ m}^3/\text{s}$, on peut déterminer l'échelle géométrique du modèle par (4.70) :

$$L^* = \frac{Q^*}{\nu^*} = 1.2 \quad (4.74)$$

Etant donné que le diamètre des conduites du prototype est de 7 cm et que la vitesse observée au sein de celles-ci est de 190 m/s, le nombre de Reynolds vaut 1.41×10^7 . Appliquant (4.74) le diamètre des conduites du modèle est de 8.4 cm. En maintenant constant le nombre de Reynolds des vitesses de 168 m/s seront donc observées sur le modèle. A ces vitesses, de la cavitation est apparue dans le modèle car la pression imposée était insuffisante. Il a donc fallut diminuer la vitesse perdant par la même la similitude de Reynolds.

Néanmoins, si l'on regarde le diagramme de Moody (Figure 4.6) pour la rugosité relative correspondante ($\varepsilon = 1.42 \times 10^{-3}$), le régime d'écoulement atteint permet de conclure à une indépendance du coefficient de frottement par rapport au nombre de Reynolds. On pourra dès lors appliquer une similitude de Froude en régime turbulent rugueux pour l'étude de cette vanne.

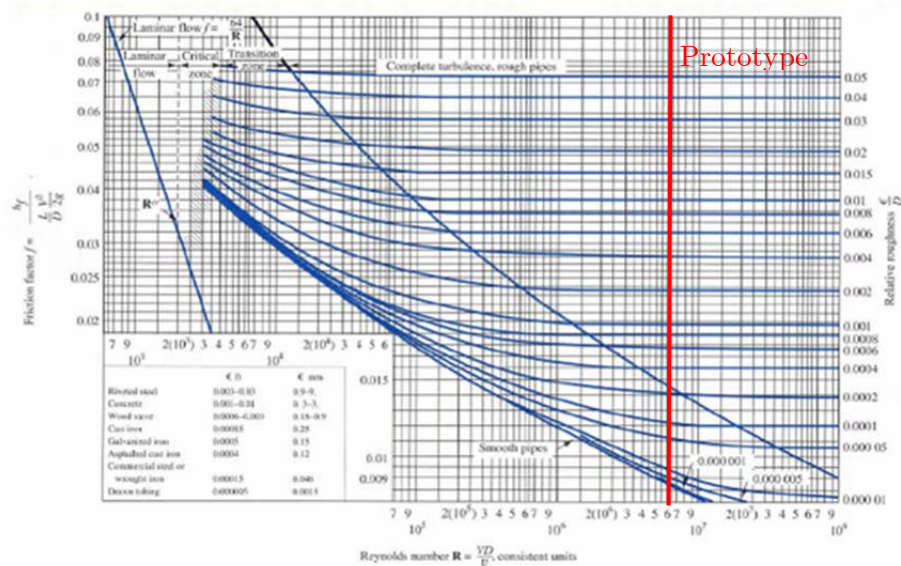


Figure 4.6 : Diagramme de Moody

9.2. Sédimentation

La sédimentation des particules en suspension dans un liquide est fonction de la valeur de la vitesse d'entraînement des particules, considérée égale à la vitesse d'écoulement du fluide u , et de la vitesse de chute w_s de la particule. La représentation schématique de l'effet de sédimentation est donnée par la figure suivante :

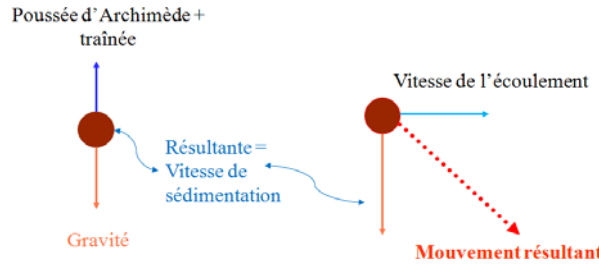


Figure 4.7 : Forces agissant sur une particule au sein d'un fluide en mouvement

La vitesse de chute est fonction de la taille, de la forme et de la masse volumique déjaugée de la particule ainsi que de la viscosité de l'eau et de la concentration en sédiments. Pour une particule isolée, ou en faible concentration, les forces s'appliquant sur la particule sont donc :

- le poids déjaugé,

$$W_s = (\rho_s - \rho) g a_1 d^3 \quad (4.75)$$

- la force de traînée,

$$F_D = C_D \rho a_2 d^2 \frac{w_s^2}{2} \quad (4.76)$$

avec pour une sphère $a_1 = \pi/6$ et $a_2 = \pi/4$.

Assurant l'équilibre des forces agissant sur la particule,

$$\begin{aligned} W_s &= F_D \\ (\rho_s - \rho) g a_1 d^3 &= C_D \rho a_2 d^2 \frac{w_s^2}{2} \end{aligned} \quad (4.77)$$

La vitesse de chute peut être calculée :

$$w_s = \sqrt{\frac{a_1}{a_2} \frac{2}{C_D} \frac{\rho_s - \rho}{\rho} g d} \quad (4.78)$$

Plusieurs auteurs se sont attachés à développer des formulations de la vitesse de chute pour différents types de particules (Van Rijn, Stokes, ...). Par exemple, Van Rijn a développé en 1993 une formule pratique, valable pour des sédiments de taille entre 100 microns et 1 mm :

$$w_s = \frac{10 \nu}{d} \left[\sqrt{1 + \frac{0.01 (s - 1) g d^3}{\nu^2}} - 1 \right] \quad (4.79)$$

L'étude de la sédimentation se faisant généralement pour des écoulements à surface libre, il conviendra d'assurer la conservation du nombre de Froude. On liera ainsi l'échelle des vitesses d'écoulement à l'échelle géométrique :

$$\frac{\frac{gL_m}{u_m^2}}{\frac{gL_r}{u_r^2}} = 1 \Rightarrow \frac{u_m}{u_r} = \sqrt{\frac{L_m}{L_r}} = \sqrt{L^*} \quad (4.80)$$

De plus, il conviendra de conserver le rapport entre la vitesse d'écoulement et la vitesse de sédimentation :

$$\frac{\frac{w_{sm}}{u_m}}{\frac{w_{sr}}{u_r}} = 1 \Rightarrow \frac{w_{sm}}{w_{sr}} = \frac{u_m}{u_r} = \sqrt{L^*} \quad (4.81)$$

Reprenant l'expression (4.79) de la vitesse de chute pour des sédiments de taille supérieure à 100 microns, il vient alors :

$$\frac{w_{sm}}{w_{sr}} = \frac{\frac{10 \nu}{d_m} \left[\sqrt{1 + \frac{0.01(\rho_m/\rho_{eau} - 1)gd_m^3}{\nu^2}} - 1 \right]}{\frac{10 \nu}{d_r} \left[\sqrt{1 + \frac{0.01(\rho_r/\rho_{eau} - 1)gd_r^3}{\nu^2}} - 1 \right]} = \frac{d_r}{d_m} \frac{\left[\sqrt{1 + \frac{0.01(\rho_m/\rho_{eau} - 1)gd_m^3}{\nu^2}} - 1 \right]}{\left[\sqrt{1 + \frac{0.01(\rho_r/\rho_{eau} - 1)gd_r^3}{\nu^2}} - 1 \right]} = \sqrt{L^*} \quad (4.82)$$

Deux degrés de liberté sont donc à disposition (ρ_m et d_m) pour vérifier la condition de similitude (4.82). Une solution consisterait à choisir l'échelle géométrique des particules identiques à l'échelle géométrique du modèle puis d'en déduire l'échelle de densité, mais cela conduit en pratique à des tailles de particules beaucoup trop fines, entraînant des effets de cohésion.

Exemple : projet de Kol Dam

L'étude de la sédimentation du barrage de Kol en inde a été réalisée au laboratoire sur un modèle réduit à l'échelle 1 : 18.5. Si l'échelle géométrique des grains avait été égale à l'échelle géométrique du modèle, les particules représentant des particules réelles de 250 microns auraient dû avoir une taille de 14 microns.

$$\frac{d_m}{d_r} = L^* \Rightarrow d_m = L^* . d_r = \frac{1}{18.5} 250.10^{-6} = 14.10^{-6} m$$

Avec des particules aussi fines, des effets de cohésion ont été observés sur le modèle.

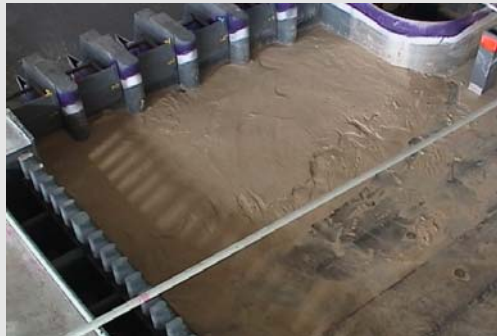


Figure 4.8 : Sédimentation observée sur le modèle de Kol Dam pour une échelle géométrique de grain correspondant à l'échelle géométrique du modèle.

Une seconde solution consisterait alors à combiner la mise à l'échelle de la taille des particules avec un changement de matériau faisant varier l'échelle des masses volumiques.

Exemple : projet de Kol Dam (suite)

En utilisant de la sciure de bois calibrée et saturée, on obtient un diamètre de grain de 650 microns pour une densité de 1,05 après saturation en eau. Ces valeurs permettent bien de satisfaire à la condition de similitude (4.55).



Figure 4.9 : Sédimentation observée sur le modèle de Kol Dam pour une combinaison adéquate de mise à l'échelle des grains et de leur masse volumique.

9.3. Entraînement de particules solides

Le cas d'étude est ici de l'érosion des sols, à l'aval d'un évacuateur de crues par exemple.

La similitude hydrodynamique à respecter pour le modèle est la similitude de Froude, ce qui fixe le rapport entre échelle des longueurs et échelle des vitesses comme expliqué précédemment.

Afin de bien représenter le phénomène, on impose une conservation du rapport adimensionnel entre force d'entraînement des particules et force résistante. La force d'entraînement exercée sur des particules de diamètre d dans un liquide de poids volumique γ_e en mouvement à la vitesse u peut être donnée par la loi de Flamant

$$F_e = \frac{k\gamma_e\pi d^2 u^2}{8g} \quad (4.83)$$

où k est un facteur dépendant de la forme des grains

La force de résistance des particules sédimentées (immobiles) est fonction du poids de celles-ci et est donnée par

$$P = \frac{\pi d^3 (\gamma_s - \gamma_e)}{6} \quad (4.84)$$

où γ_s est le poids volumique des particules sédimentées

La conservation du rapport de ces deux forces conduit à l'échelle suivante pour la masse volumique déjaugée des matériaux sédimentés, si l'on considère que les matériaux réels et sur modèle possède les mêmes caractéristiques de forme et que l'échelle des longueurs est respectée pour la taille des grains :

$$\left(\gamma_s^* - \gamma_e^*\right) = \frac{d^*}{u^{*2}} = 1 \quad (4.85)$$

9.4. Pluie sur un cabriolet

L'étude en similitude d'un cabriolet soumis aux intempéries permet de vérifier la sécurité assurée au conducteur. Les projections d'eau par les roues, la stabilité du véhicule face aux rafales de vent, la visibilité assurée au conducteur, l'efficacité du désembuage, ... peuvent ainsi être étudiées.



Figure 4.10 : Etude en similitude d'un cabriolet soumis aux intempéries

9.5. Ensablement du Mont Saint-Michel

Afin d'étudier l'impact, sur le site du Mont Saint-Michel, des aménagements envisagés pour mettre un terme à l'ensablement de la baie, une maquette géante (900 m²) en trois dimensions de la petite Baie (43 km²) a été réalisée pour simuler la sédimentation de ses fonds.



Figure 4.11 : Etude sur maquette géante de l'ensablement de la petite Baie du Mont Saint-Michel

Source : <http://www.projetmontsaintmichel.fr/agir/hydrosedimentaire.html>

Les mouvements de la marée, des fleuves et des différents phénomènes hydrauliques agitant la petite Baie y étaient simulés afin d'observer l'effet à long terme des aménagements projetés. La tangue était figurée par de la sciure de bois, le sable par de la nacre artificielle de couleur rouge.

C'était une première dans l'histoire des techniques de modélisation. Sur cette maquette, les reliefs étaient amplifiés en raison des échelles et des nécessités de la modélisation.

9.6. Effets du vent sur la tour de Burj Khalifa

Burj Khalifa (initialement appelée Burj Dubaï) est le plus haut gratte-ciel au monde (828 m de haut). Lors de l'étude du projet, il a fallu évaluer les effets du vent sur l'imposante structure. Une maquette de la tour au 1 :50 a ainsi été réalisée dans une soufflerie de 9 x 9 m² de section.

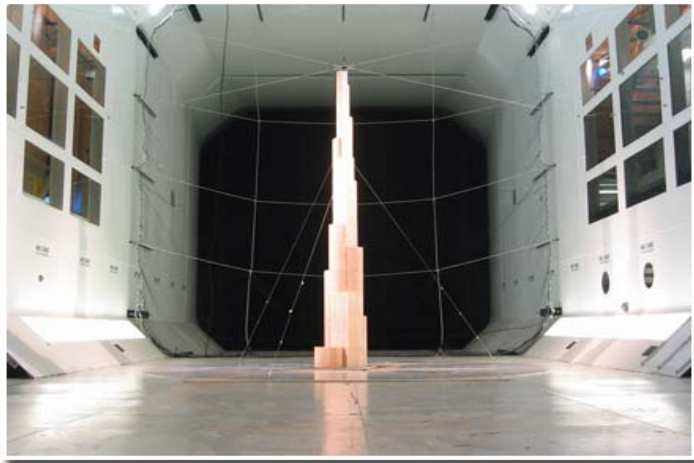


Figure 4.12 : Etude sur modèle réduit en soufflerie de Burj Khalifa

9.7. Effets du vent sur le viaduc de Millau

La construction du viaduc de Millau a permis de battre le record de lancée (171 m) et d'en faire le plus haut pont du monde (270 m). Les effets du vent étaient donc primordiaux pour son dimensionnement tant en phase définitive qu'en phase de construction. Des essais ont ainsi été réalisés en soufflerie pour étudier ces effets et s'assurer de la faisabilité des phases de construction envisagées.

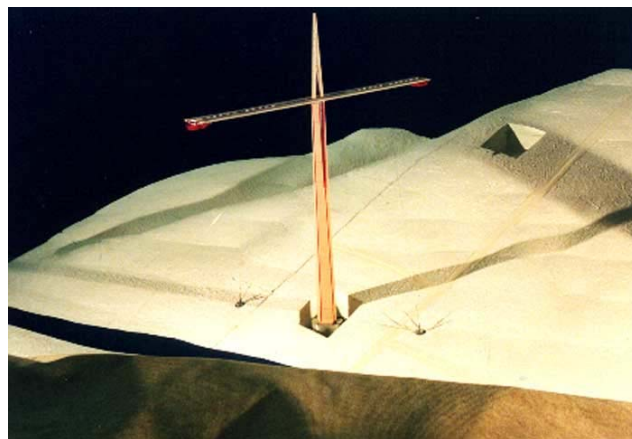


Figure 4.13 : Etude sur modèle réduit en soufflerie d'une phase de construction du viaduc de Millau

Chapitre 5 : Stabilité des écoulements et turbulence

Objectifs

- Mise en évidence historique d'une transition laminaire-turbulent
- Principe de stabilité d'une solution et sensibilité aux conditions initiales
- Notions générales sur la turbulence
- Décomposition de Reynolds et modèle « RANS »

Table des matières

1.	Expérience de Reynolds	113
2.	Unicité de la solution	114
2.1.	Exemple du moulin à eau de Lorenz :	115
2.2.	Exemple de sensibilité aux conditions initiales	116
2.2.1.	Position du problème	116
2.2.2.	Propriétés mathématiques	117
2.2.3.	Analyse et extension à la turbulence	118
3.	Exemples d'instabilité	119
3.1.	Exemple 1	119
3.2.	Exemple 2	120
3.3.	Exemples 3	120
3.4.	Instabilité de Kelvin-Helmholtz	121
4.	Etude de stabilité linéaire	122
4.1.	Modèle mathématique	122
4.2.	Etude de stabilité de l'équation d'advection diffusion	124
4.3.	Théorème de Squire	125
4.4.	Etude de stabilité de l'écoulement de Poiseuille	125
4.4.1.	Position du problème	125
4.4.2.	Analyse d'un mode de perturbation	126
4.4.3.	Simplification en fluide parfait	129
4.5.	Etude de stabilité de la couche limite laminaire	131
4.6.	Critique de l'analyse linéaire	132
5.	Turbulence	133
5.1.	Généralités	133
5.2.	Décomposition de Reynolds	134

5.2.1.	Principe.....	134
5.3.	Modèle RANS	135
5.3.1.	Conservation de la masse	135
5.3.2.	Conservation de la quantité de mouvement.....	136
5.3.3.	Système final.....	137
5.3.4.	Exploitation de mesures expérimentales	137
5.4.	Notion de cascade d'énergie	140

1. Expérience de Reynolds

En 1883, Reynolds mena une expérience simple mais fondamentale pour la compréhension des écoulements :

« *The experiments were made on three tubes... The diameters of these were nearly 1 inch, $\frac{1}{2}$ inch and $\frac{1}{4}$ inch. They were all about 4 feet 6 inches long, and fitted with trumpet mouthpieces, so that the water might enter without disturbance. The water was drawn through the tubes out of a large glass tank, in which the tubes were immersed, arrangements being made so that a streak or streaks of highly coloured water entered the tubes with the clear water.* »

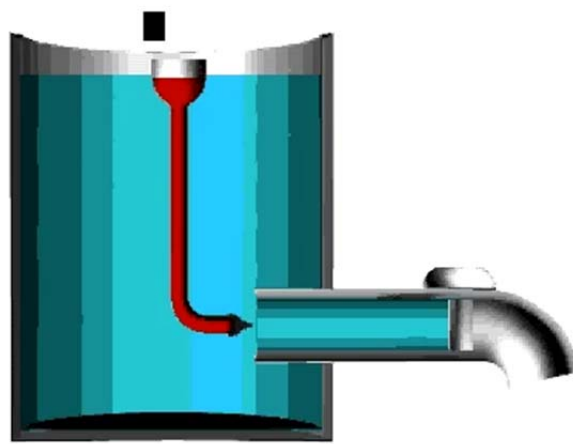


Figure 67 Schéma de l'installation expérimentale de Reynolds

Il effectua de nombreuses observations dont les principales sont :

« *The general results were as follows :*

1. *when the velocities were sufficiently low, the streak of colour extended in a beautiful straight line through the tube*
 2. *If the water in the tank had not quite settled to rest, at sufficiently low velocities, the streak would shift about the tube, but there was no appearance of sinusoidy*
 3. *As the velocity was increased by small stages, at some point in the tube, always at a considerable distance from the trumpet or intake, the colour band would all at once mix up with the surrounding water, and fill the rest of the tube with a mass of coloured water...*
- »

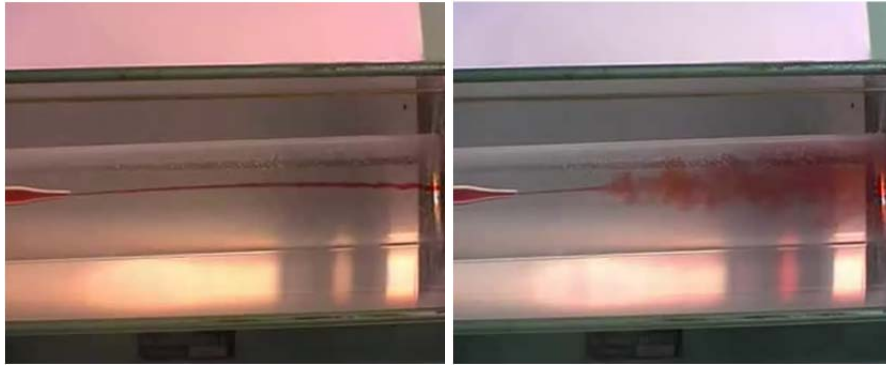


Figure 68 Visualisation d'un écoulement laminaire (à gauche) et turbulent (à droite)

Sur la transition de régime, ses constatations sont :

« ... the critical velocity was very sensitive to disturbance in the water before entering the tubes... This at once suggested the idea that the condition might be one of **instability** for disturbances of a certain magnitude and **stability** for smaller disturbances... »

En prenant grand soin de minimiser les perturbations, Reynolds parvint à établir des écoulements laminaires jusqu'à un nombre de Reynolds égal à 13.000.

Habituellement, cependant, la transition laminaire/turbulent en conduite est autour de $Re = 2000$.

Par cette expérience, Reynolds fut donc à même de caractériser les écoulements laminaires pour lesquels les filets fluides semblent « glisser » les uns sur les autres sans s'entremêler. Par contre, en écoulement turbulent, le brassage est tel qu'il devient impossible au bout d'un moment de distinguer l'origine du colorant.

Il indique aussi clairement que la transition d'écoulement dépend fortement des conditions initiales de son installation expérimentale. Par contre, en régime laminaire, le même écoulement finit toujours par s'installer. Il lie ainsi cette transition à une **instabilité** physique potentielle.

2. Unicité de la solution

Cette notion d'instabilité d'écoulement peut sembler assez étonnante si l'on regarde uniquement la formulation mathématique des équations de Navier-Stokes. En effet, la solution est unique pour autant que soient connus :

- les conditions limites aux frontières ;
- les conditions initiales.

Dans la pratique, cependant, les conditions initiales sont connues avec une certaine précision (*intervalle de confiance*). Dès lors, pour que la solution « unique » (au sens d'un observateur λ), il est nécessaire qu'elle soit stable, c'est-à-dire qu'elle soit indépendante des conditions initiales, même très proches.

2.1. Exemple du moulin à eau de Lorenz :

Un exemple très simple permet d'illustrer ces propos.

Un moulin à eau est fabriqué à partir de réservoirs dans lesquels un trou est percé à la base. Un robinet alimente le moulin par le dessus.

Etant donné que du débit sort par le trou à une vitesse variable, par conservation de quantité de mouvement, chaque réservoir crée une impulsion en fonction de son taux de remplissage.

Quand toutes les conditions sont constantes ou symétriques (géométrie, alimentation, diamètre des trous, ...), le mouvement est unique.

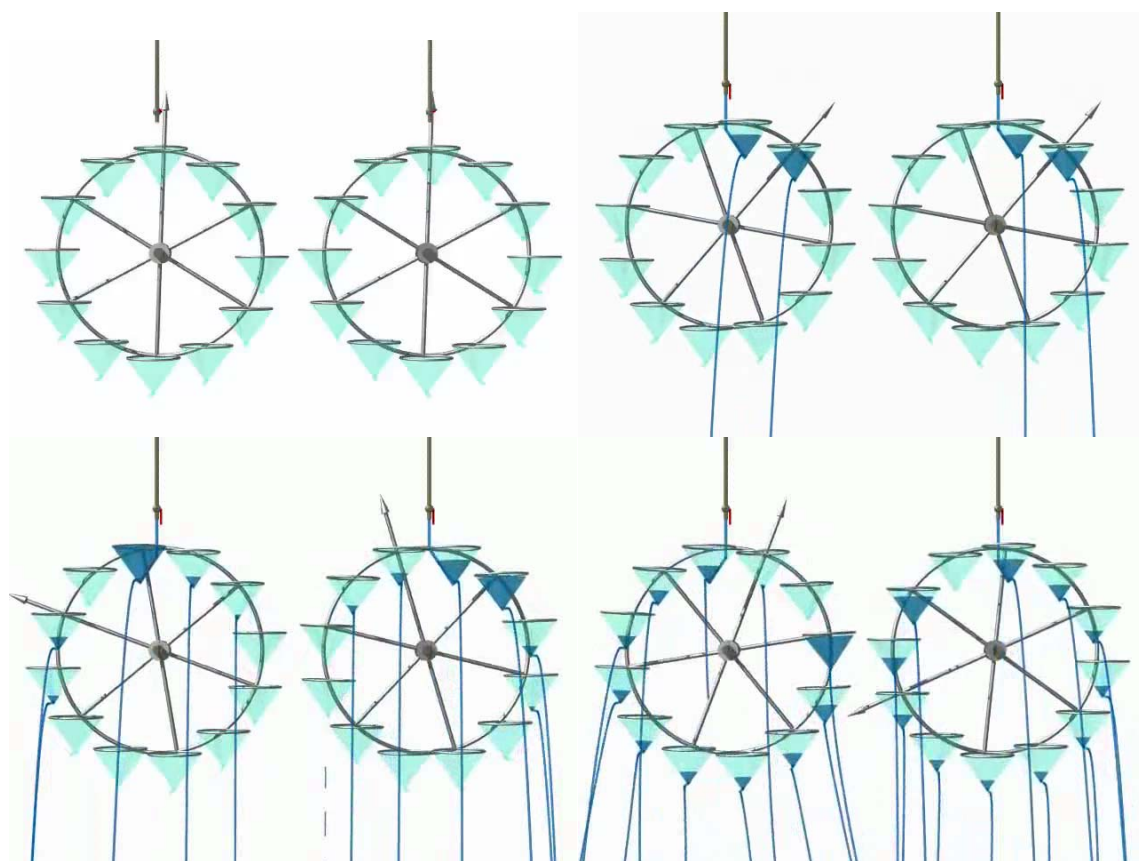


Figure 69 Illustrations du moulin à eau de Lorenz – solutions en 4 temps différents d'un moulin de caractéristiques identiques mais dont la solution initiale est différente bien que très proche

Par contre, si l'alimentation subit de légères modifications au cours du temps ou que la géométrie des trous est modifiée le mouvement semble devenir « chaotique » - Figure 69. C'est la même situation, si le même moulin, à conditions limites identiques, part d'une position initiale très proche mais différente.

Le mouvement n'est en réalité pas chaotique. La solution mécanique est belle et bien déterministe pour autant que les conditions initiales et aux limites soient connues avec une précision exacte, ce qui n'est expérimentalement pas possible.

Sur ce sujet, Edward Lorenz, météorologue au MIT, a écrit la phrase populaire suivante lors d'une conférence en 1972 :

« Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set off a Tornado in Texas? »

Il commença sa conférence de la façon suivante :

« De crainte que le seul fait de demander, suivant le titre de cet article, "un battement d'aile de papillon au Brésil peut-il déclencher une tornade au Texas ?", fasse douter de mon sérieux, sans même parler d'une réponse affirmative, je mettrai cette question en perspective en avançant les deux propositions suivantes :

Si un seul battement d'ailes d'un papillon peut avoir pour effet le déclenchement d'une tornade, alors, il en va ainsi également de tous les battements précédents et subséquents de ses ailes, comme de ceux de millions d'autres papillons, pour ne pas mentionner les activités d'innombrables créatures plus puissantes, en particulier de notre propre espèce.

Si le battement d'ailes d'un papillon peut déclencher une tornade, il peut aussi l'empêcher. »

2.2. Exemple de sensibilité aux conditions initiales

2.2.1. Position du problème

Edward Lorenz est un des fondateurs des développements de la théorie du chaos. Lors de ses travaux, il parvint notamment illustrer la sensibilité aux conditions initiales sur des système d'équation relativement simple.

Sans autre démonstration sur l'établissement de celui-ci, il s'agit d'un set d'équations simplifiées aux dérivées totales (EDO) du mouvement d'une cellule fluide chauffée en base et refroidie en altitude (idéalisation d'une cellule atmosphérique).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(Ra - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases} \quad (5.1)$$

Dans ce système, x , y et z ne sont pas des coordonnées mais une mesure de la convection, du différentiel de température et de la distorsion de cette température sur la verticale.

Les paramètres sont :

- σ le nombre de Prandtl
- Ra le nombre de Rayleigh
- β un facteur d'échelle

Le **nombre de Rayleigh** (Ra) est un nombre sans dimension caractérisant le transfert de chaleur au sein d'un fluide : inférieur à une valeur critique, le transfert s'opère essentiellement par conduction, tandis qu'au-delà de cette valeur c'est la convection libre ou naturelle qui devient importante.

Le **nombre de Prandtl** (σ) est un nombre sans dimension. Il représente le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement ν (ou viscosité cinématique) et la diffusivité thermique.

2.2.2. Propriétés mathématiques

Ce système a plusieurs propriétés dont celle de disposer de trois points d'équilibre.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{X_1} &= (0 \quad 0 \quad 0) \\ \overrightarrow{X_2} &= \left(\sqrt{\beta(Ra-1)} \quad \sqrt{\beta(Ra-1)} \quad (Ra-1) \right) \\ \overrightarrow{X_3} &= \left(-\sqrt{\beta(Ra-1)} \quad -\sqrt{\beta(Ra-1)} \quad (Ra-1) \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Cela signifie que si σ , Ra , β sont tous positifs, toutes les solutions finissent par entrer en un temps fini dans un ellipsoïde centré en $(0 \quad 0 \quad 2Ra)$. Cela définit la notion **d'attracteur** ou **ensemble-limite** qui est un ensemble, une courbe ou un espace vers lequel un système évolue de façon irréversible en l'absence de perturbations.

Si ces attracteurs sont toujours définis selon les hypothèses énoncées, la convergence vers ceux-ci s'opère de façon différente en fonction des valeurs relatives des paramètres. Pour les valeurs :

- $\sigma = 10$
- $Ra < Ra_{\text{critique}}$
- $\beta = 8/3$

En un temps fini, tous les points du domaine convergent vers la même solution **stable**.

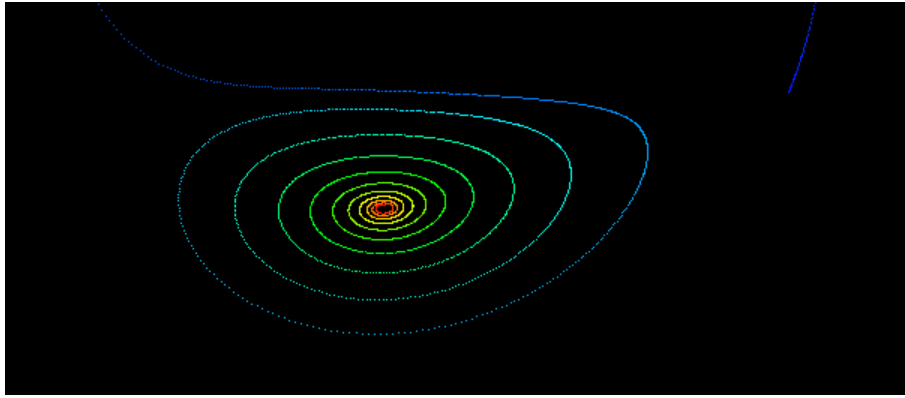


Figure 70 Convergence stable vers un seul attracteur

Par contre, pour les valeurs suivantes :

- $\sigma = 10$
- $Ra > Ra_{\text{critique}}$
- $\beta = 8/3$

Un point du domaine va osciller autour d'un point d'équilibre mais il peut également en changer sans raison apparente. Cette constatation a mené à la notion de « chaos ».

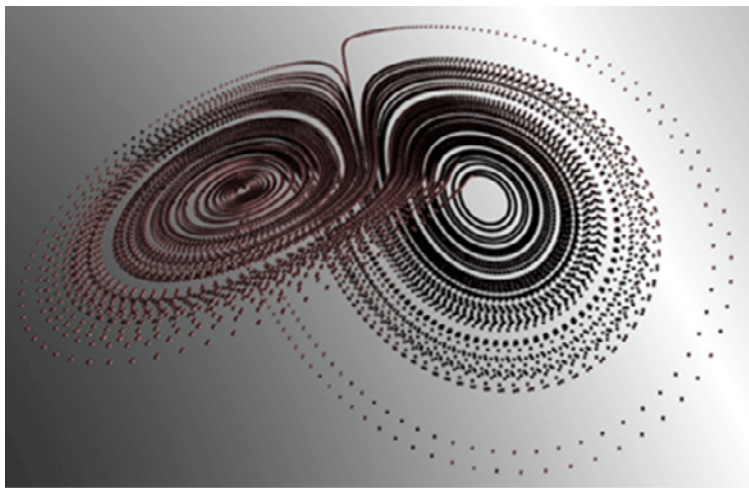


Figure 71 Illustration d'un attracteur étrange

Lorenz a nommé ce comportement « attracteur étrange ».

Deux points du domaine partant de coordonnées extrêmement proches vont très rapidement suivre des trajectoires totalement différentes. Ils vont effectuer des sauts d'un point d'équilibre à l'autre de façon semble-t-il totalement désordonnée.

2.2.3. Analyse et extension à la turbulence

Le problème de Lorenz est bel et bien déterministe mais est sensible aux conditions initiales dans certaines gammes des paramètres.

Si l'on revient maintenant à l'expérience de Reynolds, il est assez facile d'effectuer un parallèle avec la transition de régime entre un écoulement laminaire et un écoulement turbulent.

- en laminaire, la solution est univoque et indépendante des conditions initiales. Le problème est stable.
- en turbulent, la solution oscille constamment autour d'une position d'équilibre et est sensible aux conditions initiales. Le problème est instable.
- le nombre de Reynolds permet d'estimer le seuil où la transition s'effectue.

En pratique, cette instabilité des écoulements fluides a une conséquence directe, visible par le plus grand nombre chaque soir. Il s'agit de la limite temporelle de prévisibilité météorologique à une dizaine de jours. Au-delà, il faudrait accroître la précision spatiale des conditions initiales des modèles prévisionnels, ce qui paraît impossible dans la réalité.

La théorie du chaos a notamment conduit à des développements d'autres théories récentes dont les fractales en sont un bel exemple.

3. Exemples d'instabilité

Les instabilités ne sont pas uniquement liées à la turbulence. Même pour des écoulements très visqueux, elles peuvent exister.

*« Not every solution of equations of motion can actually occur in Nature, even if it is exact. Those which do actually occur not only must obey the equations of fluid dynamics, but must be also **stable** »* - Landau and Lifshitz

3.1. Exemple 1

Le premier exemple consiste en l'appareillage de deux disques en verre entre lesquels se trouve un fluide très visqueux. Une traction verticale est exercée pour séparer les disques. Idéalement, par conservation de la masse compte-tenu de l'adhérence du fluide aux parois, au fur et à mesure de l'écartement des deux disques, le fluide devrait se contracter de façon uniforme en conservant un aspect circulaire. C'est bien le cas au début du déplacement (image du centre) mais, très rapidement, une instabilité génère un résultat apparemment chaotique.

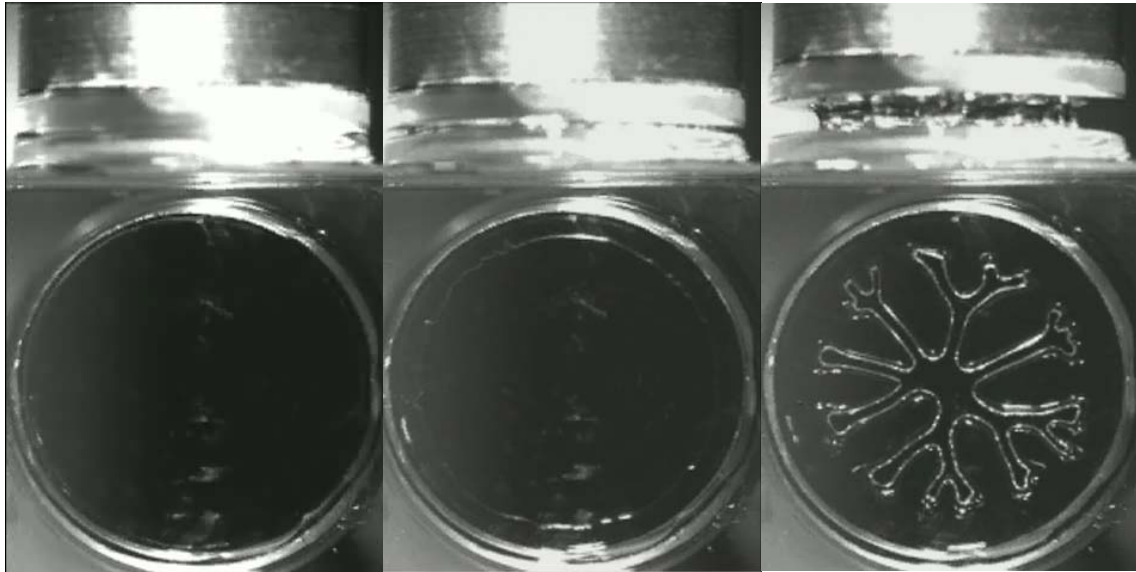


Figure 72 Instabilité visqueuse

3.2. Exemple 2

Le deuxième exemple consiste en un disque en verre rempli d'un liquide. Au centre de celui-ci, on verse une goutte d'un second liquide de viscosité différente. Idéalement, la goutte devrait se répartir uniformément de manière à former un cercle. Une instabilité, liée notamment aux tensions de surface, génère cependant une propagation totalement différente.



Figure 73 Instabilité de densité

3.3. Exemples 3

Le troisième exemple consiste en un écoulement en jet (par ex. une sortie de robinet, une injection de produits, ...). Typiquement, ces écoulements sont stables en dessous d'une certaine hauteur de chute et instables au-delà. Sur l'image de gauche, cela se traduit nettement par un filet fluide homogène en partie supérieure et la génération de gouttes en dessous. Sur l'image de droite, l'écoulement fluide est également stable en partie supérieure mais son étalement sur une

surface de réception ne se produit pas de façon symétrique mais présente des instabilités de type « flambement ».

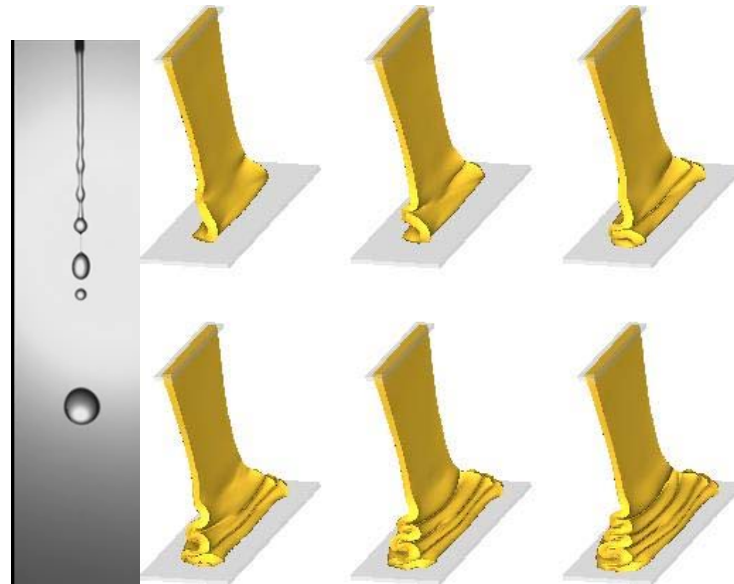


Figure 74 Exemple d'instabilités

3.4. Instabilité de Kelvin-Helmholtz

L'instabilité de Kelvin-Helmholtz est intimement liée à la notion de couche de vorticité introduite dans les écoulements irrotationnels. Il s'agit en effet de la situation où un fluide homogène subit un gradient de vitesse important (ex. : vent au-dessus d'un relief marqué, ...) ou bien du cas de l'interface entre deux fluide de densités différentes s'écoulant avec des vitesses distinctes (ex : vent à la surface de l'océan).

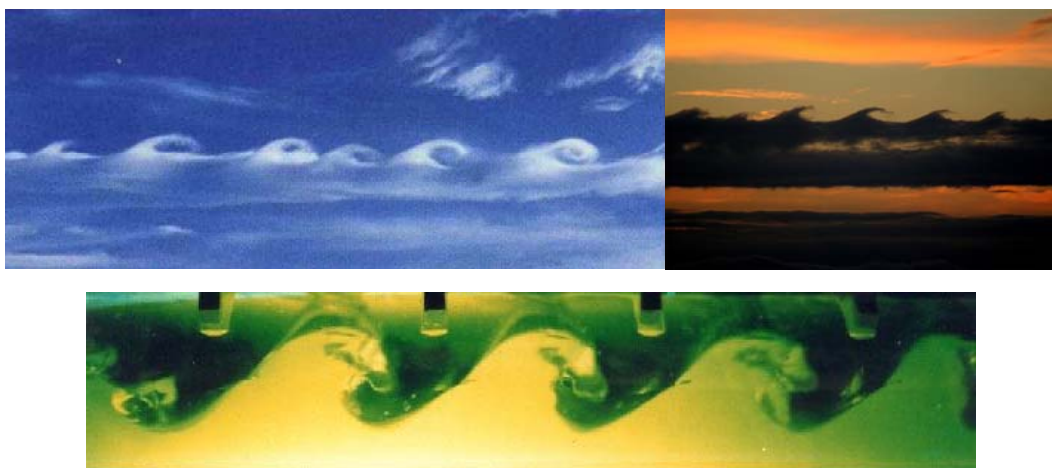


Figure 75 Illustrations d'instabilité de Kelvin-Helmholtz

Il est assez facile de comprendre cette instabilité sur base d'un simple raisonnement énergétique (Bernoulli). La Figure 76 représente l'écoulement d'un fluide homogène à deux vitesses

différentes mais à énergie totale constante. En écoulement stationnaire, les lignes de courant sont horizontales et parallèles. Si une faible perturbation existe dans ces lignes de courant (par exemple une ondulation vers le haut), le tube de courant qui va voir sa section réduite aura une vitesse accrue et donc subira une diminution de sa pression locale. L'effet opposé est bien entendu valable pour le tube de courant donc la section sera augmentée. Le gradient de pression ainsi généré est orienté dans le même sens que la perturbation initiale et aura donc tendance à accroître l'amplitude de celle-ci. Rien ne s'oppose à la propagation de la perturbation dans l'écoulement. Le phénomène, initialement local, va donc s'amplifier et subir finalement une évolution complexe suite à la non-linéarité des équations.

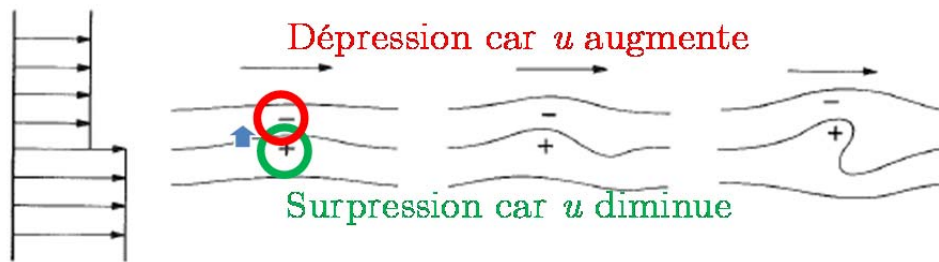


Figure 76 Explication de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz

4. Etude de stabilité linéaire

4.1. Modèle mathématique

L'étude analytique de la stabilité d'un système d'équations est assez facile si l'on reste dans le domaine linéaire. Cela signifie que l'on va s'intéresser uniquement à l'analyse de petites perturbations de la solution, c'est-à-dire caractériser le début de l'instabilité. L'utilité d'une telle approche est de trouver des critères permettant de différencier « macroscopiquement » un écoulement stable d'un écoulement instable, turbulent.

Pour cela, considérons le système d'équation pour un fluide newtonien incompressible :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{U} = 0 \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = \vec{F} - \nabla \frac{p}{\rho} + \nu \Delta \vec{U} \end{cases} \quad (5.3)$$

En écoulement stationnaire, le système (5.3) admet la solution exacte suivante :

$$\vec{U}_0(\vec{r}), p_0, \vec{F}_0(\vec{r}) \quad (5.4)$$

Si des perturbations infinitésimales sont définies comme :

$$\vec{U}_1(\vec{r}, t), p_1, \vec{F}_1(\vec{r}, t) \quad (5.5)$$

Le champ vectoriel perturbé peut s'écrire :

$$\begin{cases} \vec{U} = \vec{U}_0 + \vec{U}_1 \\ p = p_0 + p_1 \\ \vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 \end{cases} \quad (5.6)$$

En introduisant (5.6) dans (5.3), en ne conservant que les termes linéaires, il vient :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{U}_1 = 0 \\ \frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} + (\vec{U}_0 \cdot \nabla) \vec{U}_1 + (\vec{U}_1 \cdot \nabla) \vec{U}_0 = \vec{F}_1 - \nabla \frac{p_1}{\rho} + \nu \Delta \vec{U}_1 \end{cases} \quad (5.7)$$

L'analyse de stabilité par décomposition de Fourier revient à supposer qu'une perturbation peut s'exprimer en toute généralité comme :

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \vec{C}_n(\vec{r}) e^{i(\vec{k}_n \cdot \vec{r} - \alpha_n t)} \\ \alpha_n &= \omega_n + i\beta_n \\ \vec{k}_n &= \vec{k}_n^r + i\vec{k}_n^i \\ \vec{C}_n &= \vec{a}_n + i\vec{b}_n \\ a_n, b_n, k_{n,j}^r, k_{n,j}^i, \beta_n, \omega_n &\text{ réels} \end{aligned} \quad (5.8)$$

où les amplitudes \vec{C}_n sont fixées par les conditions initiales et aux limites de la perturbation.

L'opération consiste à introduire l'expression générique (5.8) dans le système perturbé (5.7) et d'en déduire les valeurs des parties imaginaires de α_n ($\Im(\alpha_n) = \beta_n$) et \vec{k}_n ($\Im(\vec{k}_n) = \vec{k}_{n,j}^i$) en fonction des autres paramètres.

En effet, un mode n quelconque s'exprime comme :

$$\vec{C}(\vec{r}) e^{\beta t} e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (5.9)$$

L'analyse de chaque mode permettra ainsi de caractériser leur stabilité ou leur instabilité soit du point de vue temporel (augmentation de l'amplitude avec le temps), soit du point de vue spatial (augmentation de l'amplitude selon une ou plusieurs coordonnées).

Les différents états de stabilité d'un mode n sont donc :

- $\beta < 0 \rightarrow$ stable temporellement, décroissance exponentielle avec le temps
- $\beta = 0 \rightarrow$ neutre temporellement
- $\beta > 0 \rightarrow$ instable temporellement, croissance exponentielle avec le temps
- les composantes imaginaires de \vec{k} fournissent une information sur la stabilité spatiale (ex : $k_{xi} < 0 \rightarrow$ instable selon x croissant)

Le problème général sera stable si tous ses modes le sont et deviendra instable quand la plus petite valeur atteindra son critère. Ce mode déterminera prioritairement l'amplification de l'instabilité et sa forme spatiale.

Dans le cas où l'on ne s'intéresse qu'aux instabilités temporelles, il convient de choisir :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{k_n} & \text{ réels} \\ \alpha & = \omega + i\beta \end{aligned} \quad (5.10)$$

A contrario, dans le cas d'étude des instabilités spatiales uniquement, il convient de choisir :

$$\begin{aligned} \alpha & \text{ réel} \\ \overrightarrow{k_n} & \text{ complexes} \end{aligned} \quad (5.11)$$

4.2. Etude de stabilité de l'équation d'advection diffusion

Pour illustrer l'analyse de stabilité linéaire temporelle par décomposition de Fourier, le cas de l'équation de **convection-diffusion** unidimensionnelle est très intéressant :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial x} + w \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (5.12)$$

Introduisons dans (5.12) un mode :

$$\phi = C e^{\beta t} e^{i(kx - \omega t)} \quad (5.13)$$

Il vient que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial x} + w \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = C e^{\beta t} e^{i(kx - \omega t)} \left((\beta - i\omega) + vik - wk^2 \right) = 0 \quad (5.14)$$

Le mode (5.13) étant en toute généralité non nul, il est possible de tirer de (5.14) l'expression de β en fonction des autres paramètres, dont seule sa partie réelle est utile à l'analyse :

$$\begin{aligned} (\beta - i\omega) + vik - wk^2 & = 0 \\ \underbrace{(\beta - wk^2)}_{\Re} + i \underbrace{(\omega - vk)}_{\Im} & = 0 \\ \Rightarrow \beta & = wk^2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Le mode sera donc :

- Stable si $w < 0$
- Instable si $w > 0$
- Neutre si $w = 0$ (équation de convection pure)

4.3. Théorème de Squire

Sans autre démonstration, le théorème de Squire est extrêmement important dans l'étude de stabilité des écoulements fluides étant donné que : « Si une perturbation déstabilisante tridimensionnelle peut être trouvée, alors, une perturbation bidimensionnelle existe pour un nombre de Reynolds inférieur ».

Dès lors, étant donné que l'on souhaite s'intéresser aux perturbations en fonction du Reynolds, il est suffisant d'étudier des perturbations 2D. Cela permet ainsi de simplifier judicieusement les équations sans perdre en généralité sur les conclusions.

4.4. Etude de stabilité de l'écoulement de Poiseuille

4.4.1. Position du problème

Considérons l'écoulement de Poiseuille unidirectionnel selon x pour un fluide newtonien incompressible et homogène :

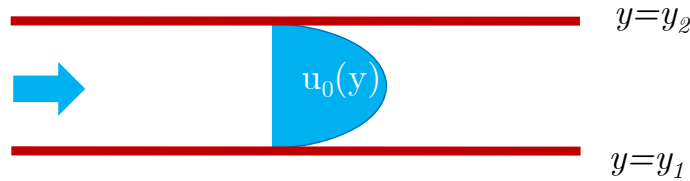


Figure 77 Schématisation d'un écoulement de Poiseuille en régime établi

La solution analytique d'un tel écoulement est établie au Chapitre 7 .

La solution de ce problème s'écrit :

$$\vec{U}_0 = \begin{pmatrix} u_0(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

En tenant compte des conditions aux limites d'imperméabilité en y_1 et y_2 , le champ de vitesse est une parabole d'expression :

$$\begin{aligned} u_0(y) &= 6\bar{u} \left(h - y \right) \frac{y}{h^2} \\ h &= y_2 - y_1 \\ \bar{u} &= -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{12} \end{aligned} \quad (5.17)$$

où \bar{u} est la vitesse moyenne.

Pour un gradient de pression particulier correspondant à :

$$\frac{dp}{dx} = -2\mu \quad (5.18)$$

L'équation (5.17) peut se simplifier compte-tenu du changement de variable suivant :

$$-1 \leq y' \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} h = 2 \\ y' = y - 1 \end{cases} \quad (5.19)$$

$$u(y) = (2 - y)y \Rightarrow u(y') = (1 - y')(1 + y') = 1 - y'^2 \quad (5.20)$$

Dans tout le domaine, la dérivée seconde selon y est donc une constante égale à -2 :

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = D^2 u_0 = -2 \quad (5.21)$$

4.4.2. Analyse d'un mode de perturbation

D'après le théorème de Squire, l'analyse de perturbations 2D est suffisante. Ces perturbations sont donc définies selon x et z comme :

$$\begin{cases} \vec{U}_1 = \delta \begin{pmatrix} \tilde{u}(y) \\ \tilde{v}(y) \\ \tilde{w}(y) \end{pmatrix} e^{i(\kappa x + \xi z - \alpha t)} \\ p_1 = \delta \tilde{p} e^{i(\kappa x + \xi z - \alpha t)} \\ |\delta| \ll 1 \end{cases} \quad (5.22)$$

Etant donné que l'on s'intéresse préférentiellement à la stabilité temporelle :

$$\begin{aligned} \kappa, \xi & \text{ réels} \\ \alpha & = \omega + i\beta \end{aligned} \quad (5.23)$$

Conservation de la masse

Selon le même principe qui avait permis d'aboutir à (5.7), l'effet de ces perturbations sur la conservation de la masse est obtenu par :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{U} & = 0 \\ \nabla \cdot (\vec{U}_0 + \vec{U}_1) - \nabla \cdot \vec{U}_0 & = \nabla \cdot \vec{U}_1 = 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

En introduisant (5.22) dans (5.24), il vient :

$$\delta \left[\tilde{u}(y) \frac{\partial e^{i(\kappa x + \xi z - \alpha t)}}{\partial x} + e^{i(\kappa x + \xi z - \alpha t)} \frac{\partial \tilde{v}(y)}{\partial y} + \tilde{w}(y) \frac{\partial e^{i(\kappa x + \xi z - \alpha t)}}{\partial z} \right] = 0 \quad (5.25)$$

Ou encore, compte-tenu que l'amplitude des perturbations ne dépend que de y :

$$i(\kappa \tilde{u} + \xi \tilde{w}) + \frac{d\tilde{v}}{dy} = 0 \quad (5.26)$$

Conservation de la quantité de mouvement

Toujours sur le même principe, les trois équations de conservation de la quantité de mouvement linéarisées s'expriment comme :

$$\frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} + (\vec{U}_0 \cdot \nabla) \vec{U}_1 + (\vec{U}_1 \cdot \nabla) \vec{U}_0 = \vec{F}_1 - \nabla \frac{p_1}{\rho} + \nu \Delta \vec{U}_1 \quad (5.27)$$

L'introduction de (5.22) dans (5.27) donne :

$$\begin{cases} i\kappa(u_0 - \hat{\alpha})\tilde{u} + \tilde{v}u_0' = -i\kappa \frac{\tilde{p}}{\rho} + \nu(D^2 - k^2)\tilde{u} \\ i\kappa(u_0 - \hat{\alpha})\tilde{v} = -\frac{\tilde{p}'}{\rho} + \nu(D^2 - k^2)\tilde{v} \\ i\kappa(u_0 - \hat{\alpha})\tilde{w} = -i\xi \frac{\tilde{p}}{\rho} + \nu(D^2 - k^2)\tilde{w} \end{cases}$$

$$D \equiv \frac{d}{dy}$$

$$k^2 = \kappa^2 + \xi^2 \quad (5.28)$$

$$u_0' = \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{du_0}{dy} = Du_0$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\alpha}{\kappa} = \text{vitesse de phase selon } x$$

Système complet

Compte-tenu de (5.26) et de (5.28), les équations de Navier-Stokes ont été transformées en un système fermé de 4 inconnues : $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}$.

Transformation du système

Il est heureusement possible de simplifier ce système. Pour cela, il faut d'abord chercher à éliminer \tilde{u} et \tilde{w} dans (5.28). En additionnant les équations selon x et z , préalablement multipliées respectivement par $i\kappa$ et $i\xi$, il vient :

$$i\kappa(u_0 - \hat{\alpha}) \underbrace{(i\kappa\tilde{u} + i\xi\tilde{w})}_{\text{par continuité : } -\frac{d\tilde{v}}{dy} = -D\tilde{v}} + i\kappa\tilde{v}u_0' = k^2 \frac{\tilde{p}}{\rho} + \nu(D^2 - k^2) \underbrace{(i\kappa\tilde{u} + i\xi\tilde{w})}_{-D\tilde{v}} \quad (5.29)$$

En utilisant (5.26), il est possible de remplacer les perturbations selon x et z par celle selon y :

$$-i\kappa(u_0 - \hat{\alpha})D\tilde{v} + i\kappa\tilde{v}u_0' = k^2 \frac{\tilde{p}}{\rho} - \nu(D^2 - k^2)D\tilde{v} \equiv f(\tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{w}, \tilde{w}) \quad (5.30)$$

L'élimination de \tilde{p} peut finalement s'effectuer par dérivation de (5.30) selon y :

$$D[-i\kappa(u_0 - \hat{\alpha})D\tilde{v} + i\kappa\tilde{v}u_0'] = D\left[k^2 \frac{\tilde{p}}{\rho} - \nu(D^2 - k^2)D\tilde{v}\right]$$

$$-i\kappa(u_0 - \hat{\alpha})D^2\tilde{v} + i\kappa\tilde{v}u_0'' = k^2 \frac{D\tilde{p}}{\rho} - \nu(D^2 - k^2)D^2\tilde{v} \quad (5.31)$$

L'utilisation de la quantité de mouvement selon y , permet de trouver une expression du gradient de pression :

$$\frac{\tilde{p}'}{\rho} = \frac{D\tilde{p}}{\rho} = \nu(D^2 - k^2)\tilde{v} - i\kappa(u_0 - \hat{\alpha})\tilde{v} \quad (5.32)$$

L'insertion de (5.32) dans (5.31) fournit finalement l'expression de Orr-Sommerfeld qui ne dépend que de \tilde{v} :

$$-i\kappa(u_0 - \hat{\alpha})D^2\tilde{v} + i\kappa\tilde{v}u_0'' = k^2\left(\nu(D^2 - k^2)\tilde{v} - i\kappa(u_0 - \hat{\alpha})\tilde{v}\right) - \nu(D^2 - k^2)D^2\tilde{v} \quad (5.33)$$

$$(D^2 - k^2)^2\tilde{v} - \frac{i\kappa}{\nu}\left[(u_0 - \hat{\alpha})(D^2 - k^2)\tilde{v} - u_0''\tilde{v}\right] = 0 \equiv f(\tilde{v}, \tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{\alpha}) \quad (5.34)$$

L'équation (5.34) est du quatrième ordre. Il est donc nécessaire de disposer de quatre conditions aux limites pour la résoudre. C'est bien le cas si l'on considère les conditions d'imperméabilité en y_1 et y_2 :

- vitesse normale nulle : $\tilde{v} = 0$
- non glissement : $\tilde{u} = \tilde{w} = 0$

Les conditions de non glissement doivent être transformées grâce à la conservation de la masse :

$$i\left(\kappa\tilde{u} - \xi\tilde{w}\right) + \frac{d\tilde{v}}{dy} = 0 \quad (5.35)$$

Ce qui fournit deux conditions supplémentaires de Neumann sur \tilde{v} .

L'équation de Orr-Sommerfeld peut donc être résolue. Pour cela, il est habituellement nécessaire de passer par la voie numérique.

Analyse

De l'équation (5.34), il est possible de faire apparaître un nombre de Reynolds :

$$\text{Re} = \frac{\max(\overline{U_0})(y_2 - y_1)}{\nu} = \frac{u_{m,0}L}{\nu} \quad (5.36)$$

(5.34) devient donc :

$$\frac{u_{m,0}L}{i\kappa\text{Re}}\left[\left(\frac{d}{dy}\right)^2 - k^2\right]^2\tilde{v} - \left[(u_0 - \hat{\alpha})\left[\left(\frac{d}{dy}\right)^2 - k^2\right]\tilde{v} - u_0''\tilde{v}\right] = 0 \quad (5.37)$$

L'intégration et la prise en compte des conditions aux limites d'imperméabilité en y_1 et y_2 permet d'écrire un système homogène qui se traduit par un problème aux valeurs propres pour une solution non triviale :

- valeurs propres : $\hat{\alpha} = f(u_0, k)$
- vecteurs propres : \tilde{v}

Zone d'instabilité de l'équation de Orr-Sommerfeld

Compte-tenu de cette définition de Reynolds, il est possible de tracer les zones d'instabilité de l'écoulement de Poiseuille. Le premier mode d'instabilité apparaît ainsi pour un Reynolds proche de 5000.

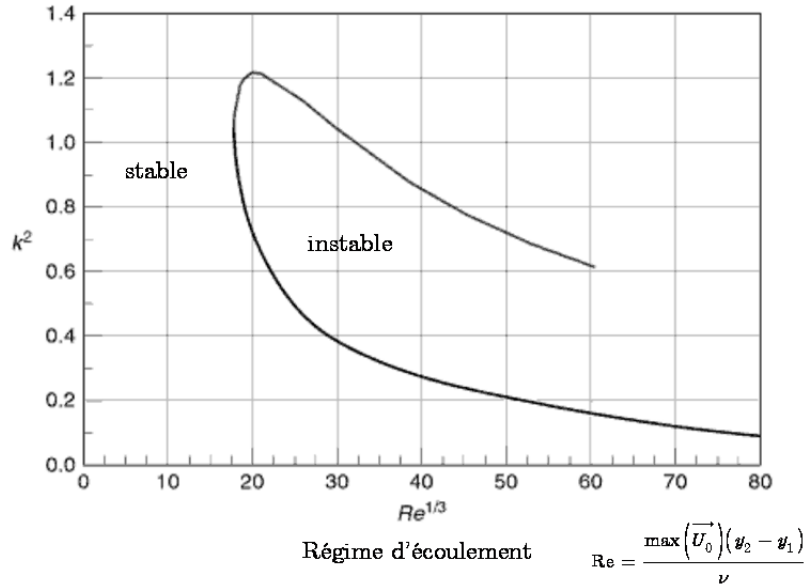


Figure 78 Zone d'instabilité de l'équation de Orr-Sommerfeld

4.4.3. Simplification en fluide parfait

Equation de Rayleigh

Dans le cas d'un fluide parfait $\nu = 0$, le système de départ se réduit aux équations d'Euler. Dans ce cas particulier, l'équation de Orr-Sommerfeld (5.34) prend la forme :

$$(u_0 - \hat{\alpha})(D^2 - k^2)\tilde{v} - u_0''\tilde{v} = 0 \quad (5.38)$$

qui est appelée couramment « équation de Rayleigh ».

L'équation initiale du quatrième ordre est transformée en équation du second ordre. Il n'y a donc plus besoin a priori que de 2 conditions aux limites (vitesse normale nulle). Les conditions de non glissement semblent ainsi « oubliées ». Le problème est dit « de perturbations singulières ».

Propriété de l'équation de Rayleigh

Considérons une solution non triviale de l'équation de Rayleigh :

$$\tilde{v}(y; \hat{\alpha} = c) \text{ avec } c \text{ complexe} \quad (5.39)$$

L'équation (5.38) devient :

$$(u_0 - c)(D^2 - k^2)\tilde{v} - u_0''\tilde{v} = 0 \quad (5.40)$$

Compte-tenu des propriétés des nombres complexes, le conjugué de (5.40) donne :

$$(u_0 - \bar{c})(D^2 - k^2)\bar{v} - u_0''\bar{v} = 0 \quad (5.41)$$

où \bar{v} est le conjugué de \tilde{v} et \bar{c} le conjugué de c .

où \tilde{v}, \bar{v} sont des perturbations quelconques non nulles

Pour une instabilité temporelle, compte-tenu de (5.9), la solution est instable pour $\Im(c) > 0$.

Etant donné que le conjugué d'une solution de l'équation de Rayleigh vérifie cette même équation, cela signifie que la solution est donc aussi instable pour $\Im(c) < 0$.

Toute valeur complexe de c indique donc que la solution est instable.

Théorème du point d'inflexion de Rayleigh

Le théorème du point d'inflexion de Rayleigh exprime une condition nécessaire mais pas suffisante d'instabilité du profil :

« Si le profil de vitesse initial u_0 possède un point d'inflexion entre les deux bornes y_1 et y_2 , alors l'écoulement **peut** être instable »

L'absence de point d'inflexion induit naturellement la stabilité du profil.

Considérons u_0 et Du_0 continu entre y_1 et y_2 , l'équation (5.38) peut s'exprimer comme :

$$D^2\tilde{v} - \left(k^2 + \frac{D^2u_0}{u_0 - \hat{c}} \right) \tilde{v} = 0 \quad (5.42)$$

La démonstration de ce théorème se fait par l'absurde. Supposons donc l'écoulement instable :

$$\alpha = \omega + i\beta \quad \text{avec } \beta > 0 \quad (5.43)$$

La multiplication de (5.42) par \bar{v} donne :

$$\bar{v}D^2\tilde{v} - \left(k^2 + \frac{D^2u_0}{u_0 - \hat{c}} \right) \underbrace{\bar{v}\tilde{v}}_{\|\tilde{v}\|^2} = 0 \quad (5.44)$$

L'intégration de (5.44) entre les deux bornes selon y donne :

$$\int_{y_1}^{y_2} \bar{v}D^2\tilde{v}dy - \int_{y_1}^{y_2} \left(k^2 + \frac{D^2u_0}{u_0 - \hat{c}} \right) \|\tilde{v}\|^2 dy = 0 \quad (5.45)$$

Et en exploitant les conditions aux limites :

$$\underbrace{\left[\bar{v}D\tilde{v} \right]_{y_1}^{y_2}}_{=0 \text{ par CL}} - \int_{y_1}^{y_2} D\bar{v}D\tilde{v}dy - \int_{y_1}^{y_2} \left(k^2 + \frac{D^2u_0}{u_0 - \hat{c}} \right) \|\tilde{v}\|^2 dy = 0 \quad (5.46)$$

$$-\int_{y_1}^{y_2} \|D\tilde{v}\|^2 dy - \int_{y_1}^{y_2} \left(k^2 + \frac{D^2 u_0 (u_0 - \bar{\hat{\alpha}})}{\underbrace{(u_0 - \hat{\alpha})(u_0 - \bar{\hat{\alpha}})}_{\|(u_0 - \hat{\alpha})\|^2}} \right) \|\tilde{v}\|^2 dy = 0 \quad (5.47)$$

La stabilité ne dépend que de la partie imaginaire de (5.47) :

$$\Im \left[-\int_{y_1}^{y_2} \|D\tilde{v}\|^2 dy - \int_{y_1}^{y_2} \left(k^2 + \frac{D^2 u_0 (u_0 - \bar{\hat{\alpha}})}{\underbrace{(u_0 - \hat{\alpha})(u_0 - \bar{\hat{\alpha}})}_{\|(u_0 - \hat{\alpha})\|^2}} \right) \|\tilde{v}\|^2 dy \right] = 0 \quad (5.48)$$

Ce qui revient à écrire :

$$-\beta \underbrace{\int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{D^2 u_0 \|\tilde{v}\|^2}{\|(u_0 - \hat{\alpha})\|^2} \right) dy}_I = -\beta I = 0 \quad (5.49)$$

L'équation (5.49) ne peut être satisfaite que si $\beta = 0$ ou $I = 0$. Or, l'écoulement a été posé instable, dès lors il est obligatoire que :

$$D^2 u_0 = 0 \quad (5.50)$$

quelque part entre y_1 et y_2 .

Théorème de Fjortoft :

« Si u_c est la vitesse au point d'inflexion, une condition nécessaire d'instabilité est que $D^2 u_0 (u_0 - u_c) < 0$ quelque part dans le fluide »

Résultat de Tollmien

« Pour un profil symétrique ou une couche limite, l'existence d'un point d'inflexion est une condition suffisante pour l'instabilité »

4.5. Etude de stabilité de la couche limite laminaire

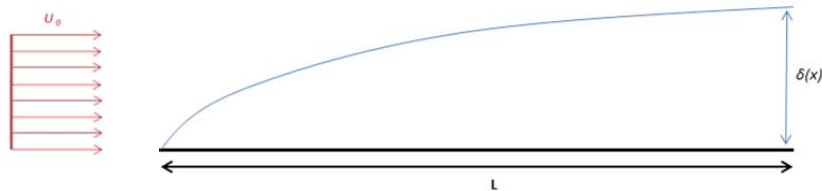


Figure 79 Evolution de la couche limite laminaire

La Figure 80 illustre la zone de stabilité de la couche limite laminaire dont les autres propriétés sont établies au Chapitre 7. Au-delà du Reynolds critique Re_{crit} (dépendant dans ce cas de l'épaisseur de la couche δ), certaines oscillations sont amplifiées temporellement.

La transition laminaire-turbulent ne se confond cependant pas avec ce Reynolds critique. En effet, les perturbations doivent être considérablement amplifiées pour obtenir un changement de régime.

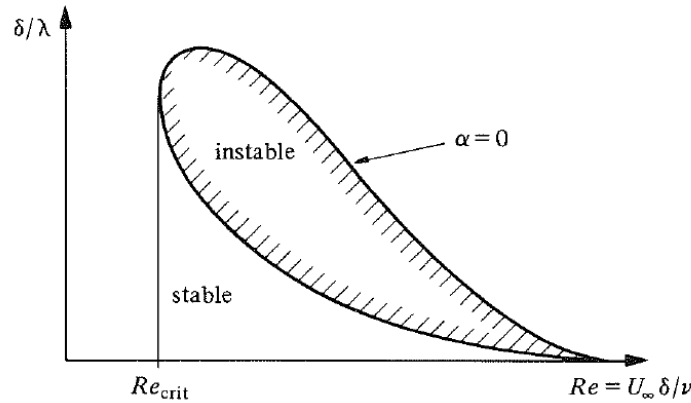


Figure 80 Zone de stabilité de la couche limite laminaire

avec δ : l'épaisseur de la couche limite - λ : la longueur d'onde

4.6. Critique de l'analyse linéaire

Une étude de stabilité linéaire peut bien évidemment être critiquée. L'étude est en effet restreinte aux variations de très faibles amplitudes. Elle ne peut donc pas tirer de conclusion pour un temps important puisque l'amplitude des instabilités grandissant, l'hypothèse principale n'est plus respectée.

Elle ne considère également habituellement que le régime d'instabilité qui croît le plus rapidement

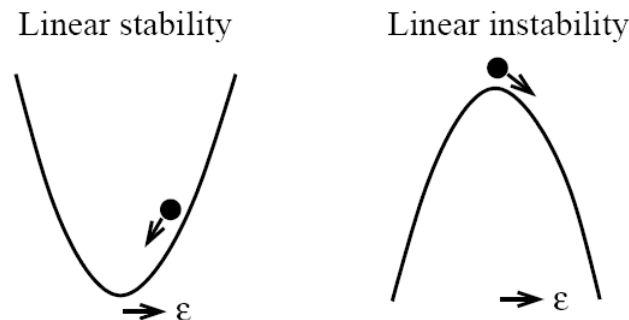


Figure 81 Schématisation d'une stabilité ou d'une instabilité linéaire

Outre ces remarques sur les hypothèses, des effets non linéaires peuvent :

- rendre la solution stable ;
- déstabiliser une solution stable pour des faibles amplitudes.

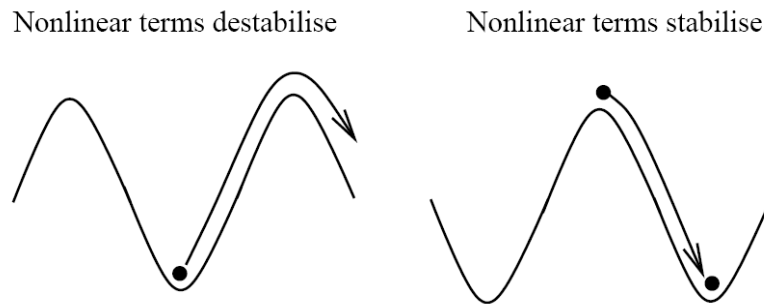


Figure 82 Schématisation des effets non linéaires possibles

Les résultats théoriques d'une analyse de stabilité linéaire devront ainsi être toujours confrontés aux comportements complexes du système non-linéaire à étudier notamment via le recours aux expérimentations.

5. Turbulence

5.1. Généralités

Les caractéristiques d'un écoulement turbulent sont :

- l'instationnarité : le vecteur vitesse varie de manière aléatoire en intensité et en direction (notion de chaos) ;
- la présence de beaucoup de tourbillons de tailles variées.

La notion de fil tourbillonnaire avait été introduite très tôt dans la description des mouvements des fluides, la turbulence a initialement été étudiée par cette voie grâce à des mouvements complexes de ces fils et tubes tourbillonnaires :

- enchevêtrement ;
- transports par l'écoulement ;
- flexions et étirements locaux.

La turbulence a une influence sur :

- le mélange efficace des particules ;
- la distribution de vitesse ;
- les pertes à la paroi ;
- ...

Habituellement, ces influences sont caractérisées sur base d'une longueur caractéristique des grands tourbillons.

5.2. Décomposition de Reynolds

5.2.1. Principe

Reynolds suggère la décomposition suivante des variables, que ce soit pour les vitesses ou la pression :

- une composante moyenne ;
- une composante fluctuante.

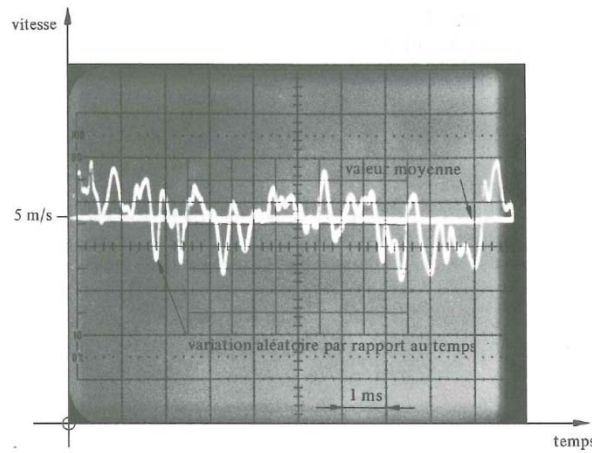


Figure 83 Observation des fluctuations turbulentes de la vitesse d'un écoulement

$$\begin{aligned}
 a &= \bar{a} + a' \\
 \bar{a} &= \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} a(t) dt \\
 \overline{a'} &= \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} a'(t) dt \equiv 0
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

Dans le cas d'écoulements « stationnaires en moyenne », l'intervalle d'intégration Δt doit être suffisamment long pour être indépendant du temps. Dans le cas d'écoulements instationnaires, il ne faut pas intégrer sur le temps mais réaliser une moyenne sur un grand nombre d'expériences.

$$\begin{aligned}
 \bar{a} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i(\vec{r}, t) \\
 \overline{a'} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a'_i(t) \equiv 0
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

On admet le plus souvent que ces moyennes sont équivalentes entre elles (on parle d'ergodicité du système) et qu'il est possible de les interchanger sans problème.

Dans l'approche de Reynolds, il faut comprendre que si la fluctuation moyenne est nulle $\overline{a'} = 0$, aucune hypothèse n'est réalisée sur son intensité. Elle peut ainsi être du même ordre de grandeur que la moyenne \overline{a} . De même, les fluctuations sont toujours tridimensionnelles même si l'écoulement moyen peut être considéré comme plan ou unidimensionnel.

5.3. Modèle RANS

La décomposition de Reynolds peut être appliquée aux équations de Navier-Stokes de manière à trouver le système d'équations applicable à l'écoulement moyen, le plus intéressant en général pour le praticien.

Les développements, appliqués à un fluide newtonien incompressible et homogène, font appels aux propriétés de moyenne suivantes :

$$\frac{\partial \overline{a}}{\partial k} = \frac{\partial \overline{a}}{\partial k} \quad (5.53)$$

$$\frac{\partial \overline{ab}}{\partial k} = \frac{\partial \overline{ab}}{\partial k} = \frac{\partial (\overline{a + a'}) (\overline{b + b'})}{\partial k} = \frac{\partial (\overline{ab} + a' \overline{b} + \overline{a} b' + a' b')}{\partial k} = \frac{\partial (\overline{ab} + a' \overline{b})}{\partial k} \quad (5.54)$$

5.3.1. Conservation de la masse

L'application de l'opérateur de moyennage à la conservation de la masse amène :

$$\overline{\nabla \cdot \vec{U}} = \nabla \cdot \vec{\overline{U}} = 0 \quad (5.55)$$

L'introduction de la décomposition de Reynolds (5.51) amène ainsi :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\overline{\vec{U} + \vec{U}'} \right) &= 0 \\ \nabla \cdot \left(\overline{\vec{U}} + \underbrace{\overline{\vec{U}'}}_{=0 \text{ par définition}} \right) &= \nabla \cdot \vec{\overline{U}} = 0 \end{aligned} \quad (5.56)$$

La formulation de la conservation de la masse n'est par conséquent pas modifiée par l'introduction de cette décomposition de Reynolds. L'écoulement moyen reste ainsi à divergence nulle.

Cette conclusion permet de trouver une nouvelle propriété des variables fluctuantes :

$$\nabla \cdot \vec{U} = \nabla \cdot \left(\overline{\vec{U}} + \vec{U}' \right) = \nabla \cdot \vec{\overline{U}} + \nabla \cdot \vec{U}' = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{U}' = 0 \quad (5.57)$$

La divergence des fluctuations est donc également nulle.

5.3.2. Conservation de la quantité de mouvement

L'application de l'opérateur de moyennage à la conservation de la quantité de mouvement est un peu plus complexe. En effet, si le membre de droite, composé de termes linéaires, ne pose pas de problème, le membre de gauche contient quant à lui des termes non linéaires par l'intermédiaire des termes convectifs :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \vec{U}) &= \vec{F} - \nabla \frac{p}{\rho} + \nu \Delta \vec{U} \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}}_{\text{termes non linéaires}} &= \underbrace{F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{termes linéaires}} + \nu \Delta u_i \end{aligned} \quad (5.58)$$

Il faut ainsi utiliser (5.54) :

$$\overline{\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}} = \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} \quad (5.59)$$

Dès lors, on aboutit à la formulation :

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = \overline{F_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \Delta \overline{u_i} - \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} \quad (5.60)$$

Grâce à la définition d'un tenseur, couramment appelé « tenseur des contraintes de Reynolds », il est possible d'écrire (5.60) en notation vectorielle, en revenant à la définition de base des tensions visqueuses :

$$\overline{\tau_t} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \vec{U}) = \vec{F} - \nabla \frac{p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\tau_t} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\tau_t} \quad (5.62)$$

Etant donné la forme du tenseur de contraintes de Reynolds (5.61), il est judicieux de définir l'intensité de la turbulence par le premier invariant du tenseur :

$$\left\| \text{tr}(\overline{\tau_t}) \right\| = \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.63)$$

Par similarité, il est également possible de poser l'énergie cinétique turbulente comme :

$$\rho \frac{\left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right)}{2} \quad (5.64)$$

5.3.3. Système final

Pour simplifier les notations, les symboles de moyenne sont utilement « oubliés » et, par mimétisme, il est possible de définir une nouvelle contrainte globale visqueuse turbulente pour aboutir au système RANS - « Reynolds Average Navier-Stokes » :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{U} = 0 \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla (\vec{U} \vec{U}) = \vec{F} - \nabla \frac{p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{\tau} \end{cases} \quad (5.65)$$

L'élégante compacité de (5.65) cache en effet des combinaisons de ces fluctuations qui induit que le système n'est pas fermé. Sa résolution demande donc :

- soit une expression globale des composantes fluctuantes en fonction des grandeurs moyennes ;
- soit l'ajout d'équations additionnelles permettant la détermination de chaque variables.

Les différents modèles de fermeture sortent du cadre de ce cours introductif et seront abordés lors de cours spécialisés.

5.3.4. Exploitation de mesures expérimentales

L'emploi du modèle conceptuel et mathématique ainsi posé n'est donc pas aisé. Une information très pertinente peut néanmoins venir de l'expérimental étant donné qu'il est possible de mesurer les caractéristiques des fluctuations turbulentes sur modèles physiques.

Pour les vitesses, il est ainsi possible de recourir notamment à des appareils tels qu'un anémomètre à fil chaud ou un laser à effet Doppler. Ce ne sont cependant que deux exemples courants.

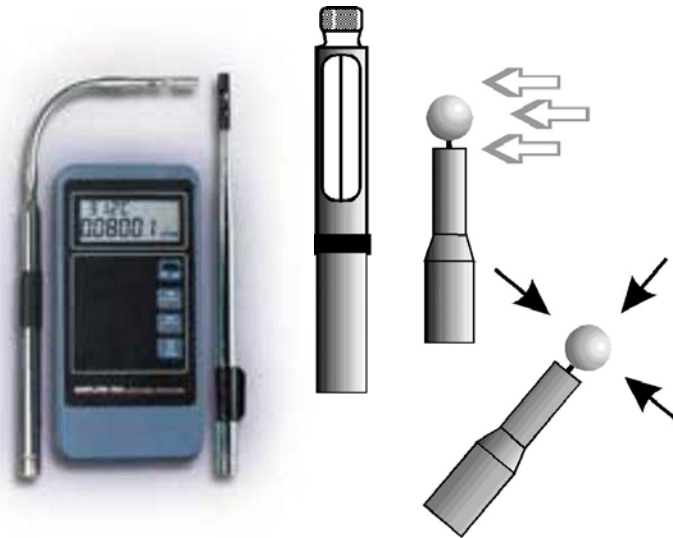


Figure 84 Anémomètre à fil chaud

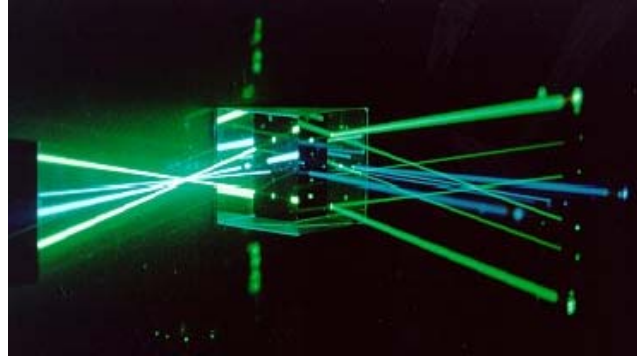


Figure 85 Laser à effet Doppler

Ces appareils expérimentaux rendent comme résultats une densité de probabilité de la vitesse, sur laquelle un traitement statistique peut être mené :

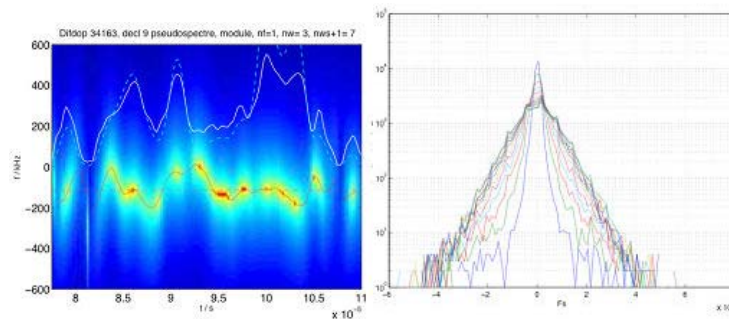


Figure 86 Exemple de densité de probabilité de la vitesse mesurée

La corrélation entre deux valeurs fluctuantes est ainsi calculée par :

$$\overline{a'b'} \quad (5.66)$$

Tandis que le coefficient de corrélation s'écrit :

$$R = \frac{\overline{a'b'}}{\sqrt{\overline{a'^2} \overline{b'^2}}} \quad (5.67)$$

Ainsi, le coefficient de corrélation spatiale effectue le calcul sur base de mesures simultanées (a' et b') mais en deux points distincts. De façon complémentaire, une auto-corrélation revient à calculer le coefficient de corrélation en un même point pour des mesures à des instants différents.

La corrélation spatiale dépend logiquement :

- de la distance r
- de la direction de mesure (corrélation longitudinale $a' = u'_1$ et $b' = u'_2$, corrélation latérale $a' = v'_1$ et $b' = v'_2$.)

De façon évidente, pour une distance nulle, le coefficient de corrélation doit être égal à l'unité. Par contre, pour une distance importante, l'observation démontre que le coefficient de corrélation tend vers zéro. Les fluctuations y sont ainsi indépendantes.

Il est possible de réaliser un graphe de R en fonction de la distance, Figure 87. De cette manière, la turbulence peut être caractérisée par une « échelle de longueur de la turbulence » définie comme :

$$L = \int_0^{\infty} R(r) dr \quad (5.68)$$

Cette distance fournit ainsi une valeur moyenne pour la grandeur des tourbillons turbulents dans l'écoulement.

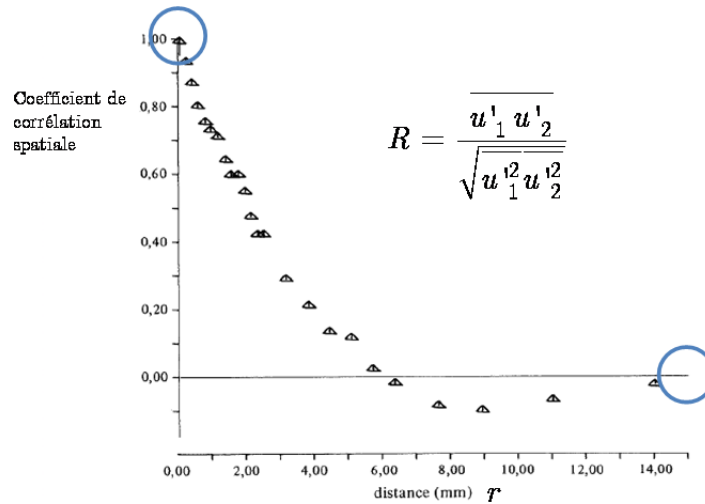


Figure 87 Exemple de corrélation spatiale longitudinale dans le cas d'une plaque plane

Outre cette échelle de longueur, valeur scalaire, la pente locale de R fournit des informations complémentaires. En effet, s'il existe une grande variation de R proche de l'origine, cela démontre la présence de tourbillons de très petite taille ou encore la « microéchelle » des tourbillons.

De façon similaire à l'échelle de longueur, une « échelle de temps » peut être évaluée sur base d'un graphe d'auto-corrélation, en calculant ce coefficient à des intervalles différents :

$$T = \int_0^{\infty} R(\Delta t) d(\Delta t) \quad (5.69)$$

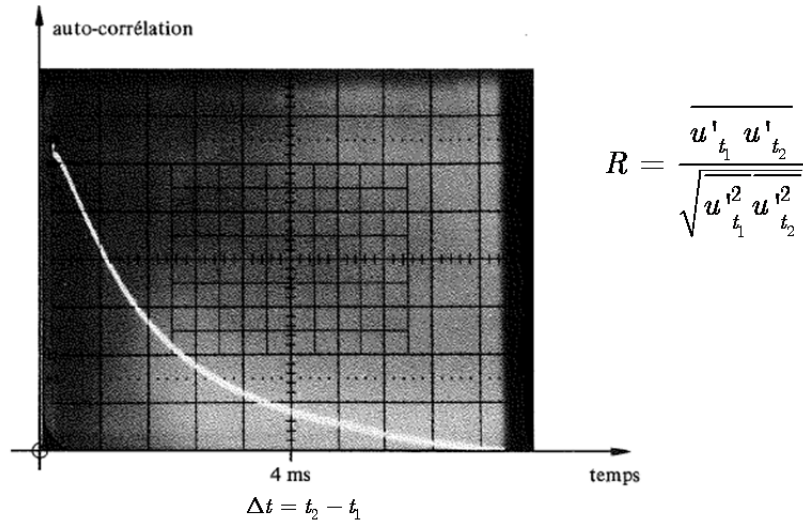


Figure 88 Exemple d'auto-corrélation dans le cas d'une plaque plane

On remarque que la turbulence est transportée par l'écoulement moyen. Lorsque la vitesse moyenne est importante, en un point donné, il est alors possible que la turbulence transportée par convection modifie les caractéristiques des fluctuations locales propres plus rapidement qu'elles ne varient elles-mêmes. Les valeurs de corrélation spatiale et d'auto-corrélation se rejoignent dans ce cas. D'après Taylor, la séparation r dans la direction de l'écoulement se calcule alors comme :

$$r = \bar{u} \Delta t \quad (5.70)$$

Cette relation permet ainsi de transformer une courbe de corrélation en une autre étant donné qu'elles sont identiques.

5.4. Notion de cascade d'énergie

La turbulence génère une perte d'énergie cinétique. En effet, pour maintenir la turbulence, il faut fournir de l'énergie cinétique. Cette énergie est livrée par l'écoulement principal à l'extérieur du domaine turbulent. L'énergie ainsi fournie est transférée aux plus grands tourbillons. Des tourbillons plus petits sont engendrés à partir des grands tourbillons, puis d'autres encore plus petits et ainsi de suite. Le processus continue jusqu'à ce que l'échelle des plus petits tourbillons soit suffisamment petite pour que les forces de viscosité commencent à être importantes. A ce moment, la dissipation visqueuse intervient et l'énergie turbulente est dissipée. Cette séquence est appelée « cascade d'énergie » ou « cascade énergétique ».

Pour des nombres de Reynolds élevés, il existe une très grande différence d'échelle entre les plus grands et les plus petits tourbillons à la fin de la cascade. Par conséquent, il y a très peu d'interaction entre les plus grands tourbillons et les plus petits au sein desquels l'énergie est dissipée.

La dissipation est déterminée par le taux d'énergie apporté par les plus grands tourbillons mais demeure indépendante du mouvement dynamique des plus petits tourbillons où la dissipation se produit. Le taux de dissipation est alors indépendant de la viscosité.

La notion de cascade d'énergie peut se comprendre également sur base des équations en introduisant un mode générique du type (5.8). Pour les termes linéaires, il est possible d'intervertir la sommation et l'opérateur mathématique. C'est par exemple le cas de la conservation de la masse :

$$\nabla \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \vec{U}_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\nabla \cdot \vec{U}_n \right) = 0 \quad (5.71)$$

Par contre, pour la conservation de quantité de mouvement, la présence des termes convectifs, non linéaires, fait apparaître directement une combinaison des modes et donc une interaction évidente des tourbillons à différentes échelles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_{n=0}^{+\infty} \vec{U}_n}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \vec{U}_n \sum_{n=0}^{+\infty} \vec{U}_n \right) &= \vec{F} - \nabla \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} P_n}{\rho} + \nu \Delta \sum_{n=0}^{+\infty} \vec{U}_n \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{U}_n}{\partial t} + \nabla \frac{P_n}{\rho} - \nu \Delta \vec{U}_n \right)}_{\text{Formulation formelle pour tout mode}} &= \vec{F} + \underbrace{\nabla \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \vec{U}_n \sum_{n=0}^{+\infty} \vec{U}_n \right)}_{\text{mélange des modes}} \end{aligned} \quad (5.72)$$

Chapitre 6 : Ecoulements externes

Objectifs

- Introduction des différents efforts introduits sur un corps par un fluide en mouvement autour de ce corps
- Notion de fluide parfait
- Théorie des écoulements irrotationnels
- Solutions analytiques d'écoulements irrotationnels
- Ecoulement irrotationnel à surface libre et houle parfaite

Table des matières

1.	Principes de « trainée » et « portance »	147
2.	Vecteur potentiel et Fonction de courant	147
2.1.	Vecteur potentiel	147
2.1.1.	Définition d'un vecteur potentiel univoque.....	148
2.1.2.	Vecteur potentiel en 2D.....	148
2.2.	Fonction de courant.....	149
2.2.1.	Fonction de courant en 2D	149
2.2.2.	Fonction de courant en 3D	149
3.	Notions de « fluide parfait » ou « fluide idéal »	150
3.1.	Aspects historiques	150
3.2.	Propriétés des écoulements de fluides parfaits.....	151
3.2.1.	Fonction de Helmholtz.....	151
3.2.2.	Théorème de Kelvin.....	152
3.2.3.	Applications du théorème de Kelvin.....	153
4.	Ecoulement irrotationnel.....	154
4.1.	Introduction.....	154
4.2.	Propriétés d'un écoulement irrotationnel.....	155
4.2.1.	Potentiel de vitesse	155
4.2.2.	Notion de circulation en écoulement irrotationnel.....	155
4.2.3.	Interprétation physique du potentiel	155
4.2.4.	Valeur de la circulation le long d'une courbe fermée	156
4.2.5.	Mobilisations des contraintes visqueuses	156
4.3.	Equations de l'écoulement à potentiel de vitesse.....	156
4.3.1.	Conservation de la masse.....	156
4.3.2.	Conservation de la quantité de mouvement.....	157

4.3.3.	Système complet d'équations	157
4.3.4.	Particularités du mouvement plan et équations de Cauchy-Riemann.....	157
4.3.5.	Interprétation des équations de Laplace.....	158
5.	Solutions analytiques d'écoulements irrotationnels	159
5.1.	Solutions analytiques simples d'écoulements irrotationnels	159
5.1.1.	Le champ de vitesse uniforme	160
5.1.2.	La source (ou puits)	160
5.1.3.	Le vortex libre.....	162
5.1.4.	Le doublet source-puits	164
5.1.5.	Le dipôle	166
5.1.6.	Ecoulement autour d'un coin d'angle arbitraire.....	168
5.2.	Solutions analytiques combinées d'écoulements irrotationnels.....	169
5.2.1.	Ecoulement autour d'un corps fictif immobile	170
5.2.2.	Ecoulement autour d'un cylindre en rotation	174
5.2.3.	Couche tourbillonnaire.....	178
6.	Ecoulement idéalisé autour d'une aile	180
7.	Ecoulement irrotationnel à surface libre d'un fluide incompressible	183
7.1.	Description du problème	183
7.2.	Houle parfaite	186
8.	Ecoulement irrotationnel entre deux cylindres coaxiaux.....	189
8.1.	Approche par résolution des équations de Navier-Stokes.....	189
8.2.	Approche par imposition de l'irrotationnalité.....	191
8.3.	Conclusion.....	192

1. Principes de « trainée » et « portance »

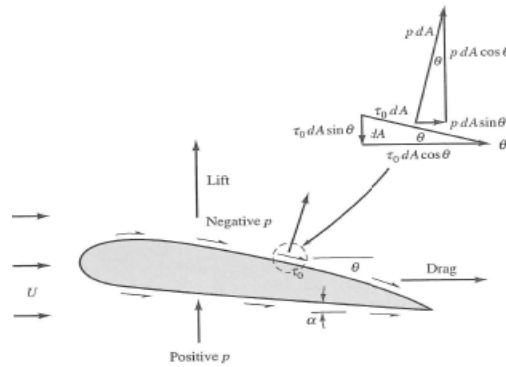
Pour décrire les efforts appliqués sur un corps solide et mince placé dans un écoulement homogène et parallèle, on utilise communément la force de portance (*Lift* en anglais) qui est perpendiculaire à l'axe principal d'écoulement et la force de trainée (*Drag* en anglais) parallèle à cet axe. L'écoulement autour de l'obstacle engendre en effet une distribution de vitesse, pression et frottement en fonction de sa forme, de sa position relative et des paramètres de l'écoulement.

Pour un fluide réel, ces forces s'écrivent comme suit :

$$F_{\text{portance}} = \int (p \cos \theta - \tau_0 \sin \theta) dA \quad (6.1)$$

$$F_{\text{trainée}} = \int \left(\underbrace{p \sin \theta}_{\text{trainée de forme}} + \underbrace{\tau_0 \cos \theta}_{\text{trainée de frottement}} \right) dA \quad (6.2)$$

θ est l'angle entre l'axe de l'écoulement et la normale à la surface du corps.



2. Vecteur potentiel et Fonction de courant

2.1. Vecteur potentiel

Pour rappel, l'équation de conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (6.3)$$

Et pour les fluides incompressibles, l'équation (6.3) dégénère en une divergence :

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (6.4)$$

Il est possible de définir un vecteur potentiel \vec{A} tel que

$$\vec{U} = \nabla \times \vec{A} \quad (6.5)$$

En effet, la divergence d'un rotationnel étant nulle, l'équation (6.4) est directement vérifiée.

Pour les écoulements compressibles stationnaires, il est également possible de définir ce vecteur potentiel :

$$\nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (6.6)$$

$$\rho \vec{U} = \rho_0 (\nabla \times \vec{A}) \quad (6.7)$$

2.1.1. Définition d'un vecteur potentiel univoque

Cependant, ce vecteur potentiel n'est pas défini de manière univoque, en effet :

$$\vec{U} = \nabla \times \left(\vec{A} + \nabla \underbrace{B}_{\text{fonction scalaire}} \right) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \nabla B = \nabla \times \vec{A} \quad (6.8)$$

Afin de palier le manque, il est choisi de contraindre le vecteur potentiel \vec{A} avec une condition additionnelle, à savoir qu'il soit solénoïdal (ou à divergence nulle).

Le vecteur potentiel est dès lors défini par :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{A} = 0 \\ \vec{U} = \nabla \times \vec{A} \\ \left(\rho \vec{U} = \rho_0 (\nabla \times \vec{A}) \right) \end{cases} \quad (6.9)$$

2.1.2. Vecteur potentiel en 2D

Pour un écoulement plan dans xy , le vecteur vitesse est défini par :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

Un vecteur potentiel vérifiant les conditions émises ci-dessus est donc :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

avec $\begin{cases} \Psi(x, y) & \text{écoulement compressible} \\ \Psi(x, y, t) & \text{écoulement incompressible} \end{cases}$

Les deux conditions de définition du vecteur potentiel donnent en effet :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(\Psi(x, y)) = 0 \\ \frac{\rho}{\rho_0} \vec{U} &= \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \Psi(x, y) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.12)$$

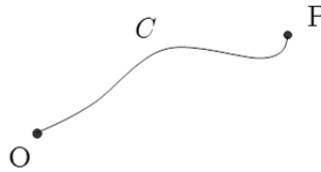
2.2. Fonction de courant

La fonction Ψ définie au point précédent est communément appelée « fonction de courant ». Selon la définition introduite, elle est telle que :

$$\begin{cases} \rho u = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \rho v = -\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \quad (6.13)$$

2.2.1. Fonction de courant en 2D

Soit 2 points du plan Oxy reliés par une courbe arbitraire C .



Le débit massique à travers C est évalué par :

$$\begin{aligned} \dot{M} &= \int_C \rho \vec{U} \cdot \vec{n} ds \\ \vec{n} &= \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}, 0 \right) \end{aligned} \quad (6.14)$$

En introduisant (6.13) dans (6.14) :

$$\begin{aligned} \dot{M} &= \int_C \rho(u, v, 0) \cdot \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}, 0 \right) ds = \int_C \rho(udy - vdx) \\ \dot{M} &= \rho_0 \int_C \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx \right) = \rho_0 \int_C d\Psi = \rho_0 (\Psi_P - \Psi_O) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Le débit massique étant nul à travers une ligne de courant, la fonction Ψ est une constante le long de cette ligne de courant, ce qui justifie l'appellation de « fonction de courant ».

2.2.2. Fonction de courant en 3D

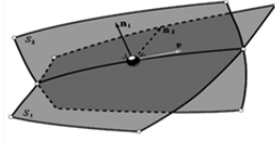
Dans l'espace, une ligne de courant est définie par l'intersection de deux surfaces de courant, soit S_1 et S_2 :

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv \Psi_1(x, y, z) = \text{constante}_1 \\ S_2 &\equiv \Psi_2(x, y, z) = \text{constante}_2 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Les deux normales à ces surfaces, \vec{n}_1 et \vec{n}_2 suivent respectivement les directions des gradients de fonction de courant respectives, soit :

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &\text{ suit la direction } \nabla \Psi_1 \\ \vec{n}_2 &\text{ suit la direction } \nabla \Psi_2 \end{aligned} \quad (6.17)$$

Enfin, le vecteur vitesse étant normal à \vec{n}_1 et \vec{n}_2 , celui-ci est orienté suivant le produit vectoriel $(\nabla\Psi_1 \times \nabla\Psi_2)$. Dès lors :



$$\vec{U} \cdot \nabla\Psi_1 = \vec{U} \cdot \nabla\Psi_2 = 0 \quad (6.18)$$

$$\rho\vec{U} = \rho_0 \nabla \times \vec{A} = \rho_0 (\nabla\Psi_1 \times \nabla\Psi_2) \quad (6.19)$$

Cette définition du potentiel vérifie bien la continuité en compressible stationnaire :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho\vec{U}) &= \rho_0 \nabla \cdot (\nabla\Psi_1 \times \nabla\Psi_2) \\ &= \rho_0 \nabla\Psi_2 \cdot \underbrace{(\nabla \times \nabla\Psi_1)}_{=0} - \rho_0 \nabla\Psi_1 \cdot \underbrace{(\nabla \times \nabla\Psi_2)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

Les expressions des composantes du vecteur vitesse et du vecteur potentiel à partir de (6.19) sont très complexes. Pour cette raison la formulation (6.19) n'a pas encore été utilisée pour résoudre les problèmes d'écoulements tridimensionnels.

3. Notions de « fluide parfait » ou « fluide idéal »

3.1. Aspects historiques

Le concept de fluide idéal, parfait, ou non-visqueux, est introduit initialement par Euler (1707-1783), avec l'objectif de permettre une étude simplifiée des fluides considérés comme peu visqueux (par exemple l'eau ou l'air).

Cette simplification connaît cependant relativement vite quelques limites dans la représentation de divers phénomènes (pertes de charge, traînée, séparation d'un écoulement, ...), et des scientifiques, comme Navier ou Stokes introduisent les concepts de viscosité. Prandtl, en 1904, introduit lui le concept de « couche limite », permettant la conciliation des théories de fluide parfait avec les concepts de pertes visqueuses, au moyen de la modélisation d'une couche restreinte (ou un sillage) telle que les forces de viscosité deviennent négligeables en dehors de cette limite. Dès lors, l'étude d'un écoulement peut être décomposée en deux « problèmes », soit

- Le problème « extérieur », où la viscosité est négligée et le fluide considéré comme parfait
- Le problème « intérieur », dans la couche limite visqueuse

3.2. Propriétés des écoulements de fluides parfaits

Le problème « extérieur », consistant à négliger la viscosité et donc à considérer le fluide comme parfait, permet le recourt aux équations d'Euler, rappelées ici sous la forme non conservative.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = \frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \end{cases} \quad (6.21)$$

Celles-ci ont quelques propriétés intéressantes qu'il est utile de rappeler ou d'introduire.

3.2.1. Fonction de Helmholtz

Les équations d'Euler peuvent également être écrites sous la formulation alternative dite de Lamb, soit

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} - \vec{U} \times \vec{\Omega} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left(\frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \right) \end{cases} \quad (6.22)$$

Où Ω est le rotationnel de vitesse de l'écoulement.

En posant comme hypothèses que les forces extérieures dérivent d'un certain potentiel G (champ conservateur) et que le fluide est barotrope (la masse volumique ne dépend que de la pression), les équations de conservation de la quantité de mouvement peuvent s'écrire

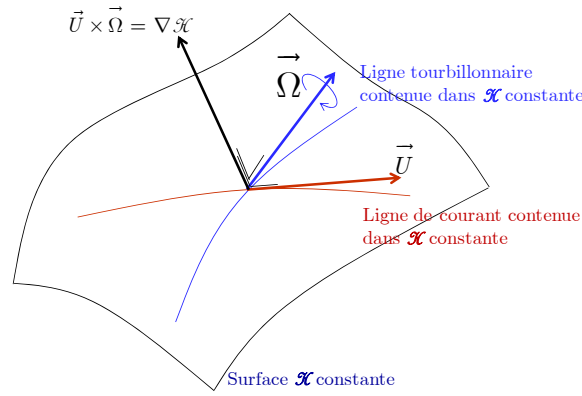
$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} - \vec{U} \times \vec{\Omega} = -\nabla \left(G + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \right) \quad (6.23)$$

Il est ainsi possible de définir la fonction de Helmholtz.

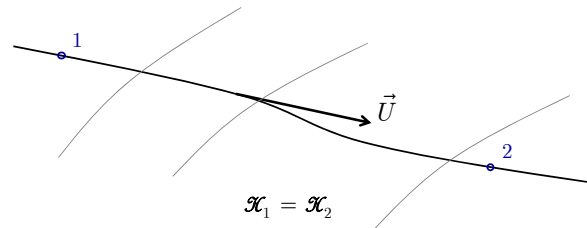
$$\mathcal{K} = G + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \quad (6.24)$$

La fonction de Helmholtz étant scalaire, son gradient est normal aux surfaces d'isovaleurs de \mathcal{K} .

En outre, en écoulement stationnaire, étant entendu que $\vec{U} \times \vec{\Omega}$ est orthogonal à ses deux composantes, les surfaces d'isovaleurs de \mathcal{K} contiennent les lignes de courant et les lignes tourbillonnaires de l'écoulement.



En corollaire, le long d'une ligne de courant, la fonction de Helmholtz sera toujours constante.



Pour un fluide incompressible, ce corollaire correspond à l'équation de Bernoulli le long d'une ligne de courant :

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho} \quad (6.25)$$

$$\mathcal{K} = \int \frac{dp}{\rho} + \frac{\|\vec{U}\|^2}{2} + G = \frac{p}{\rho} + \frac{\|\vec{U}\|^2}{2} + G \quad (6.26)$$

3.2.2. Théorème de Kelvin

Le théorème de Kelvin s'énonce comme suit :

« Pour un fluide parfait, barotrope et soumis à un champ de force conservateur, la circulation du champ de vitesse autour d'une courbe arbitraire et fermée, qui se meut avec le fluide, demeure constante »

Mathématiquement, ce théorème s'écrit :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (6.27)$$

Par définition de la circulation, le long d'une courbe en mouvement, la variation temporelle de la circulation s'écrit :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\oint_C \vec{U} \cdot d\vec{r} \right) = \oint_C \left[\frac{D}{Dt} (\vec{U} \cdot d\vec{r}) \right] = \oint_C \left[\frac{D\vec{U}}{Dt} \cdot d\vec{r} + \vec{U} \cdot \frac{D}{Dt} (d\vec{r}) \right] \quad (6.28)$$

La variation temporelle de la distance entre particules, \vec{dr} , peut s'exprimer en terme de variation de vitesse, soit :

$$\frac{D}{Dt}(\vec{dr}) = d\vec{U} \quad (6.29)$$

Sous trois hypothèses énoncées dans le théorème précité, les équations d'Euler permettent d'écrire :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \left[\frac{D\vec{U}}{Dt} \cdot d\vec{r} + \vec{U} \cdot \frac{D}{Dt}(\vec{dr}) \right] = \oint_C \left[-\nabla \left(G + \int \frac{dp}{\rho} \right) \cdot d\vec{r} + \vec{U} \cdot d\vec{U} \right] \quad (6.30)$$

en posant :

$$\begin{aligned} (\nabla G) \cdot d\vec{r} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} dx \\ \frac{\partial G}{\partial y} dy \\ \frac{\partial G}{\partial z} dz \end{pmatrix} = dG \\ \nabla \left(\int \frac{dp}{\rho} \right) \cdot d\vec{r} &= d \left[\int \frac{dp}{\rho} \right] \\ \vec{U} \cdot d\vec{U} &= d \frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Elles s'écrivent alors

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \left[- \left(dG + d \int \frac{dp}{\rho} \right) + d \frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \right] \quad (6.32)$$

Enfin, C étant une courbe fermée et l'intérieur de la parenthèse représentant un potentiel univoque, le théorème de Kelvin est démontré.

Pour rappel, cette démonstration ne fait aucune hypothèse sur l'instationnarité de l'écoulement au contraire de l'énoncé de la loi de Helmholtz qui a été énoncée autour d'un tube de courant et donc valable pour un instantané du champ de vitesse.

3.2.3. Applications du théorème de Kelvin

Pour un écoulement rotationnel de fluide parfait, la cirulation s'écrit, par Stokes :

$$\Gamma = \int_A \vec{n} \cdot \vec{\Omega} dA \quad (6.33)$$

Le théorème de Kelvin donne alors

$$\frac{D}{Dt} \int_A \vec{n} \cdot \vec{\Omega} dA = 0 \quad (6.34)$$

Et le principe suivant peut être énoncé :

« Le débit tourbillonnaire au travers de la surface A , qui se meut avec le fluide (parfait, barotrope et soumis à un champ de force conservateur), demeure constant »

Enfin, en considérant les mêmes hypothèses que le théorème de Kelvin, le théorème de circulation de Helmholtz s'écrit :

« Un tube tourbillonnaire se meut avec l'écoulement en gardant son intensité »

« Il ne peut prendre naissance ou disparaître qu'aux surfaces-frontières du fluide »

4. Ecoulement irrotationnel

4.1. Introduction

Un écoulement irrotationnel est un écoulement pour lequel le rotationnel de vitesse est nul, soit :

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{U} = 0 \quad (6.35)$$

En 2D, cela donne :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6.36)$$

En 3D, cela donne :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} ; \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} ; \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (6.37)$$

Pour rappel, le rotationnel est lié directement à la vitesse de rotation d'une particule fluide. Dans un écoulement irrotationnel, aucune rotation des particules ne peut être observée. Il n'en est bien entendu pas de même des déformations.

Pour illustrer ce propos, un exemple très parlant d'écoulement irrotationnel consiste en l'écoulement d'un fluide parfait autour d'une sphère.

Dans ce cas précis, le fluide étant parfait, il n'y a pas de frottement et donc aucune tension tangentielle n'est appliquée à la surface de la sphère. Les pressions agissent normalement à sa surface, et passent de ce fait par le centre de celle-ci. La résultante des forces volumiques est appliquée au centre de gravité de la sphère, qui est également son centre géométrique.

Aucun couple n'est donc appliqué à la sphère, et ce peu importe ses dimensions. L'accélération angulaire autour de n'importe quel axe de la sphère est donc égale à zéro. Si la sphère est

initialement au repos, elle y restera, tandis que son mouvement restera inchangé si elle était initialement en rotation.

En appliquant ce raisonnement à chaque particule d'un fluide en mouvement, tout se passe comme si des particules ne tournant pas sur elles mêmes étaient déviées de leurs trajectoires par les contours, sans tourner sur elles-mêmes.

Le mouvement de rotation de la particule est en fait une caractéristique propre, et non une conséquence de la position occupée par la particule dans l'espace. Un domaine occupé par un écoulement irrotationnel peut très bien être occupé ensuite, par le fait de l'écoulement, par un écoulement rotationnel.

4.2. Propriétés d'un écoulement irrotationnel

4.2.1. Potentiel de vitesse

Dans tout écoulement irrotationnel, il existe une fonction dite « potentiel de vitesse », telle que la vitesse dérive de ce potentiel, soit :

$$\vec{U} = \nabla\phi \quad (6.38)$$

On peut facilement vérifier que l'écoulement est bien irrotationnel. En remplaçant (6.38) dans (6.35)

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} &= \nabla \times \vec{U} \\ &= \nabla \times \nabla\phi = 0 \end{aligned} \quad (6.39)$$

4.2.2. Notion de circulation en écoulement irrotationnel

La circulation Γ le long d'une ligne AB est définie par la relation :

$$\Gamma = \int_{AB} \vec{U} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} (u\delta x + v\delta y + w\delta z) \quad (6.40)$$

Etant donné l'irrotationnalité de l'écoulement, le potentiel de vitesse (6.38) est défini. La quantité intégrée représente dès lors une différentielle totale exacte et la circulation ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des points extrêmes.

$$\int_{AB} (u\delta x + v\delta y + w\delta z) = \int_{AB} d\phi = \phi_B - \phi_A \quad (6.41)$$

4.2.3. Interprétation physique du potentiel

L'équation (6.41) indique qu'à une constante près, le potentiel en un point représente le travail de la vitesse le long d'une ligne quelconque joignant l'origine au point en question.

4.2.4. Valeur de la circulation le long d'une courbe fermée

Etant donné (6.41), sur une courbe fermée, la circulation (6.40) est nulle.

Physiquement, cela signifie que la circulation autour de toute courbe fermée dans un écoulement irrotationnel est nulle, si elle ne contient pas de points singuliers.

De par le théorème de Kelvin, il est connu que la circulation est constante (6.34) au cours du temps. Dès lors, un écoulement irrotationnel au départ le restera, de même qu'un fluide initialement au repos ne pourra produire qu'un écoulement irrotationnel.

Le théorème de Kelvin indique que tout fluide parfait barotrope, soumis à un champ de forces conservateur, initialement au repos doit engendrer un écoulement irrotationnel.

4.2.5. Mobilisations des contraintes visqueuses

Pour un fluide Newtonien incompressible, les contraintes visqueuses s'expriment par :

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \mu \Delta u_i \quad (6.42)$$

Et, en utilisant la condition d'irrotationnalité

$$\Delta u_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (6.43)$$

Et, en considérant la conservation de la masse pour un fluide incompressible,

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (6.44)$$

Dès lors, un écoulement irrotationnel d'un fluide newtonien incompressible ne mobilise pas les contraintes visqueuses, et les équations d'Euler sont valables partout.

4.3. Equations de l'écoulement à potentiel de vitesse

4.3.1. Conservation de la masse

La propriété d'irrotationnalité de l'écoulement peut être utilisée afin d'écrire sous un nouveau formalisme l'équation de la conservation de la masse.

Pour ce faire, il s'agit d'y insérer l'expression du vecteur potentiel de vitesse, soit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \nabla \phi) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \Delta \phi = 0 \quad (6.45)$$

Pour un fluide incompressible, cette équation dégénère pour donner l'équation de Laplace, soit :

$$\Delta \phi = 0 \quad (6.46)$$

4.3.2. Conservation de la quantité de mouvement

Pour la conservation de la quantité de mouvement, en partant des équations d'Euler, l'introduction du potentiel de vitesse donne, sous hypothèse d'un champ de forces conservateur :

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(G + \frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \right) \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (6.47)$$

Le membre de gauche représentant le gradient d'une fonction scalaire, la masse volumique ne peut dépendre que de la pression, ce qui correspond par définition à un fluide barotrope. Dès lors :

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \underbrace{\left(G + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \right)}_{\mathcal{K}} \right) = 0 \quad (6.48)$$

Ou encore après intégration :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{K} = C(t) \quad (6.49)$$

Avec une constante C dépendant encore du temps puisque l'intégration n'est que spatiale.

4.3.3. Système complet d'équations

Au final, un écoulement irrotationnel sera régi par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \Delta \phi = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{K} = C(t) \end{cases} \quad (6.50)$$

Si le fluide considéré est incompressible, l'équation de conservation de la masse dégénère pour donner l'équation de Laplace, et le système d'équations devient :

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{K} = C(t) \end{cases} \quad (6.51)$$

4.3.4. Particularités du mouvement plan et équations de Cauchy-Riemann

Si on se rappelle la définition de la fonction de courant, définie pour un mouvement plan :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (6.52)$$

Et que l'on combine ces expressions avec l'équation d'irrotationnalité (6.36), on obtient en 2D

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \Delta \psi = 0\end{aligned}\tag{6.53}$$

Qui est l'équation de Laplace pour la fonction de courant.

En mouvement plan, les composantes de la vitesse, en écoulement irrotationnel, peuvent dès lors s'écrire en fonction des dérivées soit du potentiel de vitesse, soit de la fonction de courant :

$$\begin{aligned}u &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}\end{aligned}\tag{6.54}$$

Ces relations entre dérivées de la fonction de courant et du potentiel de vitesse, constituent les équations dites de Cauchy-Riemann de la théorie des nombres complexes.

En satisfaisant les équations de Laplace, les deux fonctions sont harmoniques, et forment une fonction analytique complexe appelée potentiel complexe de vitesse :

$$z = \phi + i\Psi\tag{6.55}$$

La théorie des nombres complexes est donc applicable aux problèmes d'écoulements plans irrotationnels de fluides incompressibles représentés par l'équation de Laplace en z .

4.3.5. Interprétation des équations de Laplace

Les deux équations introduites précédemment sont identiques d'un point de vue formalisme, mais elles représentent des problèmes physiquement différents. En effet, une courbe à potentiel de vitesse constant représente une isopotentielle, alors qu'une courbe à potentiel de courant constant représente une ligne de courant particulière. Cependant, il est néanmoins possible de relier celles-ci.

Une première approche consiste à exprimer respectivement les différentielles du potentiel et de la fonction de courant :

$$d\phi = 0 = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = u dx + v dy\tag{6.56}$$

$$d\psi = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy\tag{6.57}$$

On a dès lors :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi=const} = \frac{-u}{v} \quad (6.58)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi=const} = \frac{v}{u} \quad (6.59)$$

Et, finalement,

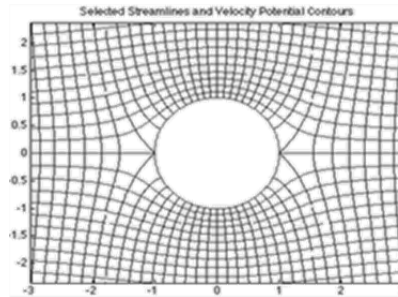
$$\frac{-u}{v} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi=const} = -\left(\frac{dx}{dy}\right)_{\psi=const} \quad (6.60)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi=const} = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi=const}} \quad (6.61)$$

Une seconde approche utilise la propriété de tangence entre la vitesse et une quelconque ligne de courant :

$$\begin{aligned} \vec{U} \cdot \nabla \Psi &= 0 \\ \nabla \phi \cdot \nabla \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (6.62)$$

Ce qui signifie, par définition, que lignes de courant et équipotentielles sont orthogonales.



5. Solutions analytiques d'écoulements irrotationnels

Le but de la recherche de solutions analytiques est de déterminer plusieurs solutions relativement particulières, en proposant des fonctions analytiques simples vérifiant l'équation de Laplace.

5.1. Solutions analytiques simples d'écoulements irrotationnels

Il existe principalement trois écoulements irrotationnels de fluide incompressible possédant des solutions analytiques simples :

- le champ de vitesse uniforme ;
- la source (ou puits) ;
- le vortex libre.

A partir de ces trois écoulements dits « principaux », il est également possible, via le principe de superposition, de constituer des écoulements plus complexes possédant eux aussi des solutions analytiques, comme, par exemple :

- le doublet source-puits ;
- le dipôle.

Enfin, un écoulement plus particulier peut être étudié à partir de la théorie des nombres complexes, il s'agit de l'écoulement autour d'un coin dont l'angle est paramétrable.

5.1.1. Le champ de vitesse uniforme

Supposons un écoulement plan xy de direction x et d'intensité constante U_∞ . Le champ de vitesse est dès lors :

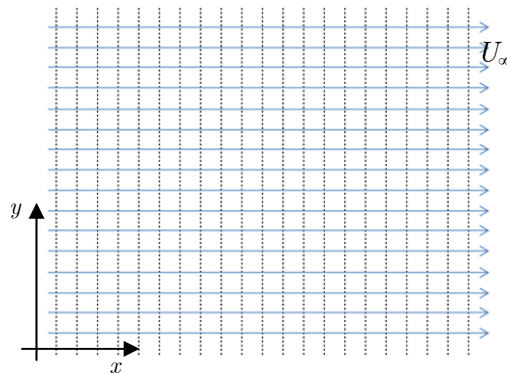
$$\vec{U} = \begin{pmatrix} U_\infty \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.63)$$

Il est aussi possible d'écrire, en imposant que la vitesse dérive d'un potentiel :

$$\begin{cases} u = U_\infty = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = 0 = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (6.64)$$

Et ce système d'équations s'intègre rapidement pour donner

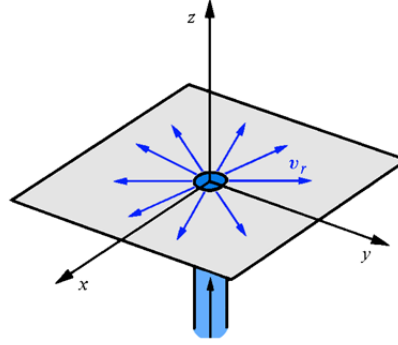
$$\begin{cases} \psi = U_\infty y \\ \phi = U_\infty x \end{cases} \quad (6.65)$$



Ce qui se représente par la figure ci-dessus, c'est-à-dire des lignes de courant parallèles à l'axe des x et des lignes de potentiel parallèles à l'axe des y .

5.1.2. La source (ou puits)

Supposons un écoulement axisymétrique issu d'une source de débit total Q [m³/s].



L'écoulement souhaité est bidimensionnel dans le plan xy . Il est donc nécessaire de définir le débit spécifique m [m^2/s], par unité d'épaisseur b , au moyen de (+ pour une source et – pour un puits) :

$$q = \pm \frac{Q}{b} \quad (6.66)$$

En coordonnées polaires, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.67)$$

La conservation de la masse permet ainsi d'écrire :

$$\nabla \cdot \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (6.68)$$

$$\Rightarrow r v_r = \text{constante} \quad (6.69)$$

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \frac{\pm m}{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.70)$$

Avec :

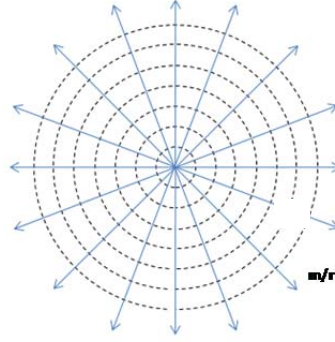
$$m = \pm \frac{Q}{2\pi b} \quad (6.71)$$

Et, en exprimant les vitesses en fonction du potentiel et de la fonction de courant, toujours en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} v_r = \frac{Q}{2\pi r b} = \frac{\pm m}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ v_\theta = 0 = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{cases} \quad (6.72)$$

Enfin, ce système d'équations peut être intégré, et donne l'allure des lignes de courant et des équipotentiels :

$$\begin{cases} \psi = \pm m \theta \\ \phi = \pm m \ln r \end{cases} \quad (6.73)$$



Ce qui se représente par la figure ci-dessus, c'est-à-dire des lignes de courant radiales issues de la source (ou dirigées vers le puits...) et des lignes de potentiel circulaires.

5.1.3. Le vortex libre

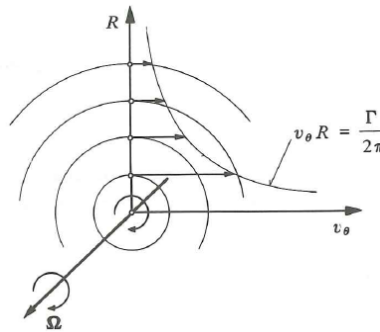
Avant de présenter les développements relatifs au vortex, il faut préciser qu'il existe deux types de vortex :

- le vortex forcé, pour lequel la vitesse tangentielle est linéairement proportionnelle au rayon (rotation solide)

$$v_\theta \sim r \quad (6.74)$$

- le vortex libre, pour lequel la vitesse tangentielle est inversement proportionnelle au rayon, qui est la solution d'un fil tourbillonnaire rectiligne

$$v_\theta \sim \frac{1}{r} \quad (6.75)$$

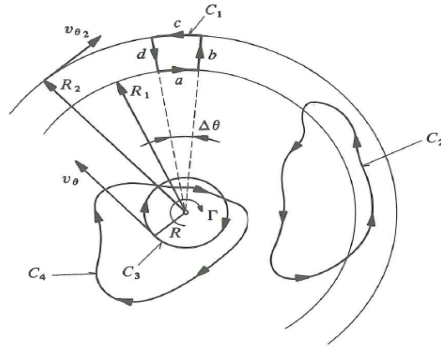


S'il est évident que le vortex forcé est rotationnel, il est moins immédiat de statuer sur l'éventuelle irrotationnalité du vortex libre. Il est donc intéressant d'étudier l'écoulement à l'extérieur du noyau.

Le long de la courbe particulière C_1 , l'écoulement est bien irrotationnel :

$$\Gamma_{C_1} = \oint_{C_1=a+b+c+d} \vec{U} \cdot d\vec{r} = (v_{\theta 1} R_1 - v_{\theta 1} R_2) \Delta\theta + \underbrace{\int_{b+d} \vec{U} \cdot d\vec{r}}_{=0 \text{ car direction radiale}} = 0 \quad (6.76)$$

et la vitesse dérive donc d'un potentiel.



Le long de C_2 , quelconque et réductible¹⁵, il est possible d'écrire, la fonction ϕ étant univoque :

$$\Gamma_{C_2} = \oint_{C_2} \vec{U} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_2} \nabla \phi \cdot d\vec{r} = \oint_{C_2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \right) = \oint_{C_2} d\phi = 0 \quad (6.77)$$

L'écoulement est ainsi irrotationnel le long de toute courbe réductible.

Enfin, le long de C_3 , par la loi de Helmholtz :

$$\Gamma_{C_3} = \oint_{C_3} \vec{U} \cdot d\vec{r} = \Gamma_{\text{fil tourbillonnaire}} \quad (6.78)$$

Ce type de courbe est irréductible, et le point de percée du fil tourbillonnaire constitue un point singulier.

Supposons donc l'écoulement irrotationnel lié à un fil tourbillonnaire rectiligne d'intensité Γ , et donc imposant un champ de vitesse tel que :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\Gamma}{2\pi r} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.79)$$

En exprimant les vitesses en fonction du potentiel et de la fonction de courant, toujours en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} v_r = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{cases} \quad (6.80)$$

¹⁵ Une courbe réductible est une courbe fermée qui, par une déformation continue, peut être rétrécie jusqu'à un point, sans quitter le domaine.

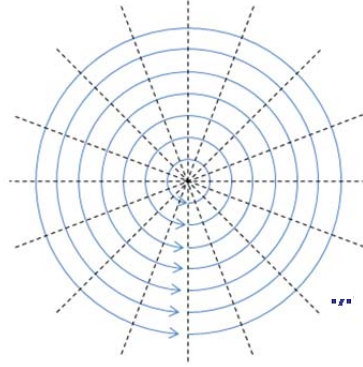
Un domaine où toutes les courbes fermées sont réductibles est une région simplement connexe.

Si la région est percée, il existe des courbes irréductibles. Une telle région est dite doublement connexe.

La circulation n'est pas nécessairement nulle autour de courbes irréductibles dans un champ de vitesse irrotationnel mais elle est constante autour de courbes du même type.

Ce système d'équations peut être intégré, et donne l'allure des lignes de courant et des équipotentiels :

$$\begin{cases} \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \\ \phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \end{cases} \quad (6.81)$$

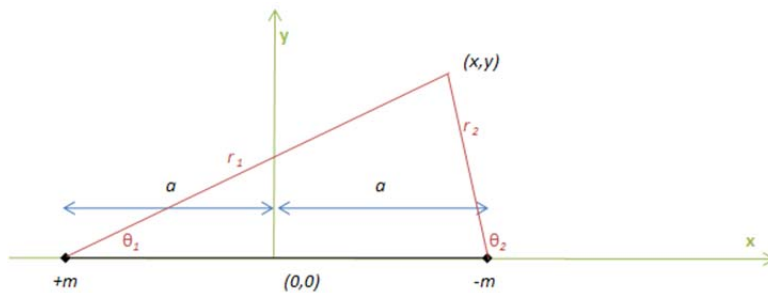


Ce qui se représente par la figure ci-dessus, c'est-à-dire des lignes de courant circulaires et des équipotentiels radiales.

5.1.4. Le doublet source-puits

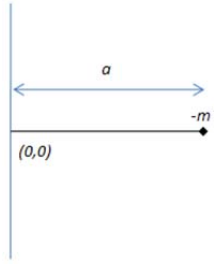
Considérons un ensemble composé d'une source et d'un puits, distancés de $2a$, possédant chacun un débit spécifique m .

De manière à étudier l'écoulement composé par ces deux écoulements principaux, le principe de superposition va être utilisé, c'est-à-dire que les solutions analytiques des deux écoulements principaux vont simplement être additionnées afin de donner la solution analytique du nouvel écoulement.



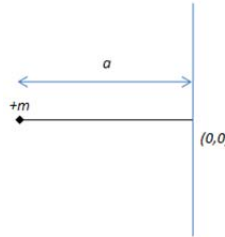
La solution finale se doit d'être présentée en coordonnées cartésiennes. Pour ce faire, les solutions des écoulements principaux vont donc, avant d'être combinées, être exprimées en coordonnées cartésiennes.

Pour le puits, cela donne :



$$\begin{cases} \psi = -m\theta_2 = -m \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x-a}\right) \\ \phi = -m \ln r_2 = -m \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \end{cases} \quad (6.82)$$

Pour la source, on a :



$$\begin{cases} \psi = m\theta_1 = m \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x+a}\right) \\ \phi = m \ln r_1 = m \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \end{cases} \quad (6.83)$$

Pour la fonction potentiel, la combinaison des deux solutions donne alors,

$$\phi = \phi_{source} + \phi_{puit} = m \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} - m \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \quad (6.84)$$

Sachant que

$$\begin{aligned} \ln a - \ln b &= \ln \frac{a}{b} \\ \ln a^x &= x \ln a \end{aligned} \quad (6.85)$$

On trouve finalement

$$\rightarrow \phi = \frac{1}{2} m \ln \left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right] \quad (6.86)$$

De même, pour la fonction de courant, la combinaison des deux solutions donne :

$$\psi = \psi_{source} + \psi_{puits} = m \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x+a}\right) - m \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x-a}\right) \quad (6.87)$$

Sachant que

$$\begin{aligned} \tan(a-b) &= \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)} \\ \operatorname{Atan}(-b) &= -\operatorname{atan}(b) \end{aligned} \quad (6.88)$$

On trouve successivement :

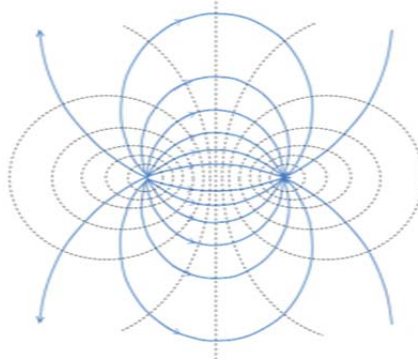
$$\begin{aligned}
 \frac{\psi}{m} &= \operatorname{atan}\left(\tan\left(\frac{\psi}{m}\right)\right) = \operatorname{atan}\left\{\tan\left[\operatorname{atan}\left(\frac{y}{x+a}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x-a}\right)\right]\right\} \\
 &= \operatorname{atan}\left\{\frac{\tan\left(\operatorname{atan}\left(\frac{y}{x+a}\right)\right) - \tan\left(\operatorname{atan}\left(\frac{y}{x-a}\right)\right)}{1 + \tan\left(\operatorname{atan}\left(\frac{y}{x+a}\right)\right)\tan\left(\operatorname{atan}\left(\frac{y}{x-a}\right)\right)}\right\} \\
 &= \operatorname{atan}\left\{\frac{\frac{y}{x+a} - \frac{y}{x-a}}{1 + \frac{y}{x+a}\frac{y}{x-a}}\right\} = \operatorname{atan}\left(\frac{-2ay}{x^2 + y^2 - a^2}\right)
 \end{aligned} \tag{6.89}$$

Et, finalement

$$\psi = -m \operatorname{atan}\left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}\right) \tag{6.90}$$

On trouve donc

$$\begin{cases} \psi = -m \operatorname{atan}\left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}\right) \\ \phi = \frac{1}{2} m \ln\left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}\right] \end{cases} \tag{6.91}$$



5.1.5. Le dipôle

Le dipôle est un cas particulier du doublet source-puits. Il se distingue de celui-ci dans le fait que source et puits sont supposés être au même point, autrement dit que la dimensions a est nulle.

D'autre part, afin qu'il y ait un débit assuré mathématiquement, il faut imposer que le débit spécifique m soit infiniment grand et que le produit am , que l'on appellera « intensité du dipôle », soit imposé à une valeur finie, soit λ .

Pour la fonction de courant, cela donne :

$$\begin{aligned}
 \psi_{dipole} &= \psi_{doublet} \Big|_{\substack{a \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty \\ 2am = \lambda}} \\
 &= -m \operatorname{atan} \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right) \Big|_{\substack{a \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty \\ 2am = \lambda}} \\
 &\stackrel{Taylor}{=} \frac{-2amy}{x^2 + y^2 - a^2} \Big|_{\substack{a \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty \\ 2am = \lambda}} + O \left(\frac{\lambda y}{x^2 + y^2} \right)^3 \\
 &= \frac{-\lambda y}{x^2 + y^2}
 \end{aligned} \tag{6.92}$$

Etant donné que, par Taylor :

$$\operatorname{atan} \left(\frac{x}{a} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{x}{a} \right)^{2n+1}, \left\{ \left| \frac{x}{a} \right| < 1 \right\} \tag{6.93}$$

Pour le potentiel, on a :

$$\begin{aligned}
 \phi_{dipole} &= \phi_{doublet} \Big|_{\substack{a \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty \\ 2am = \lambda}} \\
 &= \frac{1}{2} m \ln \left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right] \Big|_{\substack{a \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty \\ 2am = \lambda}} \\
 &\stackrel{Taylor}{=} \frac{1}{2} m \left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} - 1 \right] \Big|_{\substack{a \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty \\ 2am = \lambda}} \\
 &= \frac{1}{2} m \frac{(x+a)^2 + y^2 - (x-a)^2 - y^2}{(x-a)^2 + y^2} \Big|_{\substack{a \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty \\ 2am = \lambda}} \\
 &= \frac{1}{2} m \frac{4ax}{(x-a)^2 + y^2} \Big|_{\substack{a \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty \\ 2am = \lambda}} = \frac{2amx}{x^2 + y^2}
 \end{aligned} \tag{6.94}$$

Etant donné que, par Taylor :

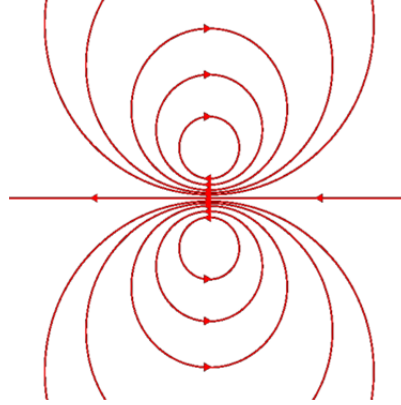
$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n, \{ |x-1| \leq 1; x \neq 0 \} \tag{6.95}$$

Au final, on a :

$$\begin{cases} \psi_{dipole} = \frac{-\lambda y}{x^2 + y^2} \\ \phi_{dipole} = \frac{\lambda x}{x^2 + y^2} \end{cases} \tag{6.96}$$

Ou encore, en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \psi_{dipole} = \frac{-\lambda r \sin \theta}{r^2} = \frac{-\lambda \sin \theta}{r} \\ \phi_{dipole} = \frac{\lambda r \cos \theta}{r^2} = \frac{\lambda \cos \theta}{r} \end{cases} \quad (6.97)$$



5.1.6. Écoulement autour d'un coin d'angle arbitraire

L'écoulement autour d'un coin ne peut être reproduit directement par combinaison des trois écoulements principaux introduits précédemment.

Sa représentation analytique est la fonction complexe suivante :

$$f(z) = Az^n = Ar^n e^{in\theta} = Ar^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \quad (6.98)$$

A et n sont des constantes.

En fonction de la remarque (6.55), potentiel et fonction de courant prennent respectivement les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \phi &= Ar^n \cos(n\theta) \\ \psi &= Ar^n \sin(n\theta) \end{aligned} \quad (6.99)$$

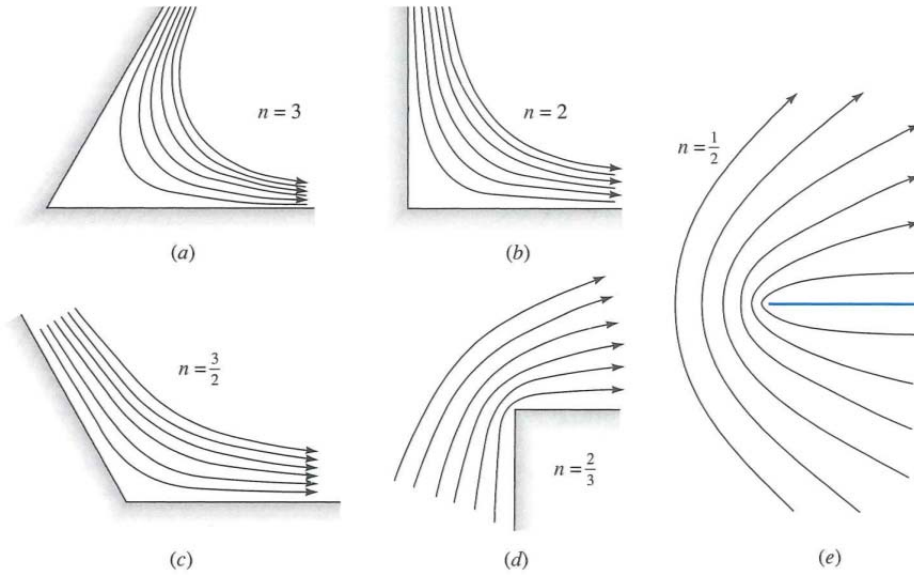
Le champ de vitesses est donné par :

$$\begin{aligned} \vec{U} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\ &= nAr^{n-1} \begin{pmatrix} \cos(n\theta) \\ -\sin(n\theta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.100)$$

La fonction complexe (6.98) représente l'écoulement autour d'un angle β :

$$\beta = \pi/n \quad (6.101)$$

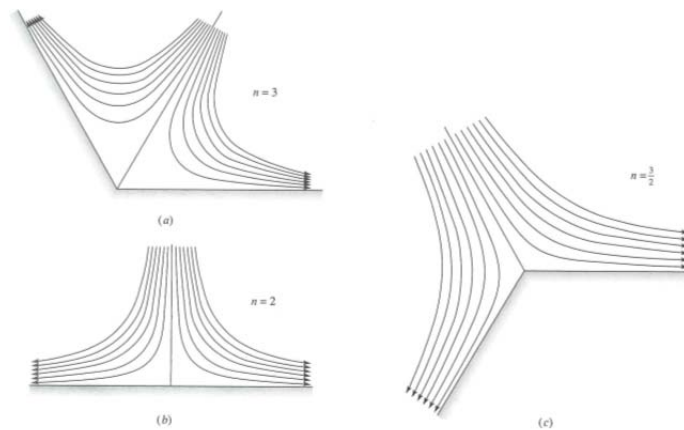
Pour différentes valeurs du paramètre n , les lignes de courant correspondant à ces équations sont présentées ci-dessous :



En regard des ces figures, l'analyse des vitesses au voisinage du coin permet de mettre en avant l'existence de points singuliers :

- si $n > 1$, $\vec{U} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le coin matérialise un point d'arrêt ;
- si $n < 1$, $\vec{U} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \infty \\ \infty \end{pmatrix}$ et le coin matérialise un point de vitesse infinie.

En considérant les solutions symétriques des figures *a* à *c*, il est possible de représenter le point de stagnation dû à l'écoulement vers un coin d'angle 2β , ce qui est illustré à la figure ci-dessous.



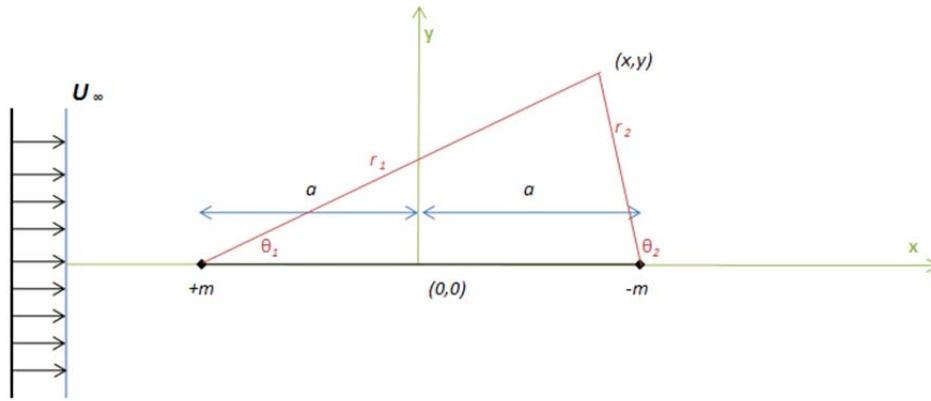
5.2. Solutions analytiques combinées d'écoulements irrotationnels

A partir des écoulements simples définis et étudiés au chapitre précédent, il est possible d'introduire d'intéressantes solutions analytiques d'écoulements irrotationnels. Au-delà de

l'étude analytique de la fonction de courant et du potentiel, il est également possible de déduire des comportements physiques intéressants.

5.2.1. Écoulement autour d'un corps fictif immobile

En combinant un champ de vitesse uniforme avec un doublet source-puits, il est possible de matérialiser un écoulement autour d'un corps immobile de forme elliptique.

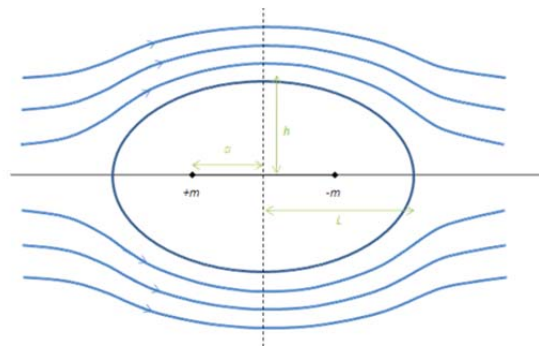


Afin d'obtenir les solutions analytiques des lignes de courant et des équipotentiels correspondant à cet écoulement, il s'agit de combiner linéairement les solutions des écoulements particuliers cités, on a donc respectivement :

$$\psi_{\text{ellipse}} = \psi_{\text{uniaxial}} + \psi_{\text{source}} + \psi_{\text{puit}} = U_{\infty}y - m \operatorname{atan} \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right) \quad (6.102)$$

$$\phi_{\text{ellipse}} = \phi_{\text{uniaxial}} + \phi_{\text{source}} + \phi_{\text{puit}} = U_{\infty}x + \frac{1}{2}m \ln \left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right] \quad (6.103)$$

Et, pour les lignes de courant, on obtient la figure suivante :



Les dimensions du corps formé peuvent être déterminées à partir de la solution analytique de l'écoulement. Soit l la demi longueur et h la demi hauteur de cette ellipse. Par définition, l'ellipse formée est une ligne de courant particulière. De ce fait, l'écoulement ne peut traverser le corps fictif ainsi formé. Les points extrêmes amont et aval (sur l'axe des x) sont donc des points

d'arrêts, leur vitesse (selon x) étant nulle. La composante de la vitesse selon x s'obtient directement en dérivant la fonction potentiel de vitesse selon y , soit :

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[Uy - m \operatorname{atan} \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right) \right] \\
 &= U - m \frac{\partial}{\partial y} \left[\operatorname{atan} \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right) \right] = U - m \frac{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)}{1 + \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)^2} \\
 &= U - m \frac{\left(\frac{2a(x^2 + y^2 - a^2) - 2y(2ay)}{(x^2 + y^2 - a^2)^2} \right)}{1 + \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)^2} = U - m \frac{2a(x^2 - y^2 - a^2)}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2}
 \end{aligned} \tag{6.104}$$

La condition de vitesse nulle sur l'axe des x donne dès lors :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} u = 0 \\ y = 0 \\ x = l \end{cases} &\rightarrow U - m \frac{2a(l^2 - 0^2 - a^2)}{(l^2 + 0^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2} = 0 \\
 &U - m \frac{2a}{(l^2 - a^2)} = 0 \\
 &\rightarrow l = \pm \sqrt{\frac{2am}{\pi} + a^2}
 \end{aligned} \tag{6.105}$$

Que l'on écrira

$$\frac{l}{a} = \sqrt{\frac{2m}{Ua} + 1} = \sqrt{\zeta + 1} \quad \left(\text{avec } \zeta = \frac{2m}{Ua} \right) \tag{6.106}$$

Le point $(l,0)$ appartient au corps formé par la combinaison des écoulements. En utilisant la relation analytique trouvée ci-dessus, il est donc possible de trouver la valeur particulière de la ligne de courant formée par ce corps.

$$\begin{aligned}
 \psi_{(l,0)} &= U_0 - m \operatorname{atan} \left(\frac{2a0}{l^2 + 0^2 - a^2} \right) \\
 &= -m \operatorname{atan} \left(\frac{0}{l^2 - a^2} \right) = 0 = \psi_0
 \end{aligned} \tag{6.107}$$

Finalement, il reste à déterminer la demi-hauteur du corps formé en exprimant mathématiquement le fait que cette hauteur correspond au point d'intersection de la ligne de courant ψ_0 et de l'axe des y .

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{a^2} - 1 \right) \tan \left(\frac{2h}{\zeta a} \right) \quad \left(\text{avec } \zeta = \frac{q}{\pi Ua} = \frac{2m}{Ua} \right) \tag{6.108}$$

$$\begin{cases} \psi = 0 \\ x = 0 \rightarrow 0 = Uh - m \operatorname{atan}\left(\frac{2ah}{0^2 + h^2 - a^2}\right) \\ y = h \end{cases}$$

$$m \operatorname{atan}\left(\frac{2ah}{h^2 - a^2}\right) = Uh$$

$$\rightarrow h = \frac{(h^2 - a^2)}{2a} \tan\left(\frac{Uh}{m}\right)$$
(6.109)

Que l'on écrira :

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{a^2} - 1 \right) \tan\left(\frac{2h}{\zeta a}\right) \quad \left(\text{avec } \zeta = \frac{2m}{Ua} \right)$$
(6.110)

En ramenant le doublet à un dipôle, l'ellipse peut dégénérer en un cercle. En se replaçant en coordonnées polaires, (6.102) et (6.102) deviennent :

$$\psi_{\text{cercle}} = U_{\infty} r \sin \theta - \frac{\lambda \sin \theta}{r}$$
(6.111)

$$\phi_{\text{cercle}} = U_{\infty} r \cos \theta + \frac{\lambda \cos \theta}{r}$$
(6.112)

On peut vérifier que le corps formé est bien un cercle en analysant le vecteur vitesse à sa frontière. Il s'agira en effet d'un cercle si, pour son rayon r_c , la vitesse est tangente au cercle, c'est-à-dire si la composante radiale de la vitesse est nulle. Le vecteur vitesse peut s'obtenir directement à partir des fonctions définies précédemment :

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ v_{\theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{cases}$$
(6.113)

Et, plus particulièrement :

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(U_{\infty} r \sin \theta - \frac{\lambda \sin \theta}{r} \right) \\ &= U_{\infty} \cos \theta - \frac{\lambda \cos \theta}{r^2} \end{aligned}$$
(6.114)

$$\begin{aligned} v_{\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(U_{\infty} r \sin \theta - \frac{\lambda \sin \theta}{r} \right) \\ &= -U_{\infty} \sin \theta - \frac{\lambda \sin \theta}{r^2} \end{aligned}$$
(6.115)

Enfin, on a :

$$\begin{aligned} v_r &= U_{\infty} \cos \theta - \frac{\lambda \cos \theta}{r^2} = 0 \\ \Leftrightarrow r_c &= \sqrt{\frac{\lambda}{U_{\infty}}} \end{aligned}$$
(6.116)

Et un cercle sera donc bel et bien formé pour une combinaison de l'intensité du dipôle et le champ uniforme. Ce cercle constitue une ligne de courant particulière, et ne peut donc, par

définition, être traversé par aucune autre ligne de courant. Il forme donc en effet « un corps » dans l'écoulement (comme pour l'ellipse).

Au niveau de la vitesse tangentielle, une observation intéressante peut être faite. En effet, si l'on se place au niveau du cercle formé, c'est-à-dire en $r=r_c$, l'équation (6.116) donne

$$v_\theta(r = r_c) = -U_\infty \sin \theta - \frac{\lambda \sin \theta}{U_\infty} = -2U_\infty \sin \theta$$

$$v_\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0^\circ \\ \theta = 180^\circ \end{cases}$$
(6.117)

Ce qui signifie que des points de stagnation sont observés en amont et en aval de l'obstacle.

Enfin, la distribution de pression autour du cylindre peut être obtenue en utilisant l'équation de Bernoulli. En posant une pression de référence p_0 au point de stagnation amont, on a

$$p = p_0 - \rho \frac{v_\theta^2}{2}$$

$$= p_0 - \frac{\rho}{2} (2U_\infty \sin \theta)^2$$
(6.118)

Ce qui donne une distribution symétrique de la pression autour du cylindre, et conduit dès lors à l'absence de forces sur le corps, poussée et trainée étant dès lors nulles.

Il est également possible d'étudier le temps de parcours d'un fluide en écoulement autour d'un tel corps. Ce temps de parcours vaut

$$\tau_{\text{parcours}} = \int_0^{\tau_{\text{parcours}}} d\tau = \int_{\text{parcours}} \frac{ds}{v_\theta}$$
(6.119)

Successivement, il est possible d'écrire :

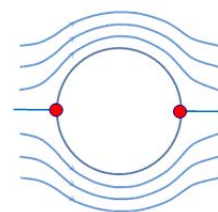
$$v_\theta = \frac{ds}{dt} = -2U_\infty \sin \theta \Rightarrow \frac{ds}{-2U_\infty \sin \theta} = dt$$

$$\Rightarrow \frac{-r_c d\theta}{\sin \theta} = 2U_\infty dt \Rightarrow \frac{-d\theta}{\sin \theta} = \frac{2U_\infty}{r_c} dt$$
(6.120)

$$t = \frac{r_c}{2U_\infty} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{-d\theta}{\sin \theta} = -\frac{r_c}{2U_\infty} \log \left[\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$
(6.121)

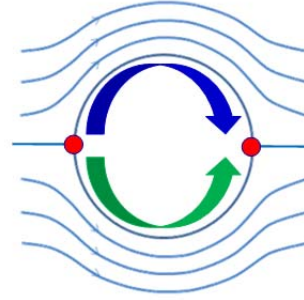
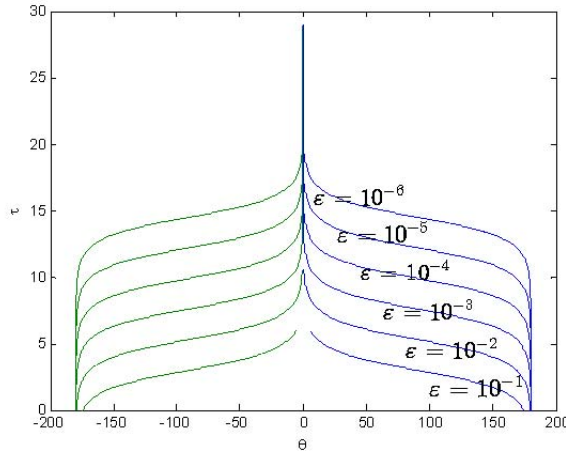
L'intégrale permet de rendre compte de singularités :

- $\theta = 0$
- $\theta = \pi$



Le temps de parcours par les deux côtés peut être évalué :

- Par le « haut »... entre $0+\varepsilon$ et $\pi-\varepsilon$, ε représentant l'éloignement infinitésimal au point d'arrêt
- Par le « bas »... entre $0-\varepsilon$ et $\pi+\varepsilon$.



Peu importe l'« erreur » ε , les temps de parcours sont identiques. La sensibilité du temps total à ε illustre par contre bel et bien l'existence de la singularité liée au point d'arrêt.

5.2.2. Écoulement autour d'un cylindre en rotation

L'écoulement étudié consiste en l'écoulement autour d'un corps en rotation. De manière analogue à précédemment, celui-ci consiste en la combinaison d'un champ d'écoulement uniforme, d'un dipôle, et en plus d'un vortex, afin de « matérialiser » l'effet sur le fluide de la rotation du corps. On a alors

$$\begin{aligned}\psi_{rotation} &= \psi_{source} + \psi_{dipole} + \psi_{vortex} \\ &= U_{\infty} r \sin \theta - \frac{\lambda \sin \theta}{r} + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r\end{aligned}\quad (6.122)$$

Le cercle créé est le même qu'au cas précédent. En effet, la vitesse radiale, qui fournit la valeur du rayon, n'est pas influencée par la présence supplémentaire du vortex.

$$\begin{aligned}v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(U_{\infty} r \sin \theta - \frac{\lambda \sin \theta}{r} \right) \\ &= U_{\infty} \cos \theta - \frac{\lambda \cos \theta}{r^2}\end{aligned}\quad (6.123)$$

Cependant, les vitesses tangentielles sont, elles, logiquement influencées par la présence du vortex, et on a :

$$\begin{aligned}v_{\theta}(r = r_c) &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_{\infty} \sin \theta - \frac{\lambda \sin \theta}{r_c^2} - \frac{\Gamma}{2\pi r_c} \\ &= -2U_{\infty} \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_c}\end{aligned}\quad (6.124)$$

A nouveau, une observation intéressante peut être faite au sujet de cette vitesse tangentielle. On remarque en effet que l'équation (6.124) possède des zéros qui ne sont plus sur l'axe x :

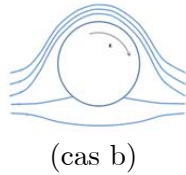
$$\begin{aligned} v_\theta(r = r_c) = 0 &= -2U_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_c} \\ \Rightarrow \sin \theta &= -\frac{\Gamma}{4\pi r_c U_\infty} \end{aligned} \quad (6.125)$$

Ces racines sont donc fonctions des différents paramètres de l'écoulement.

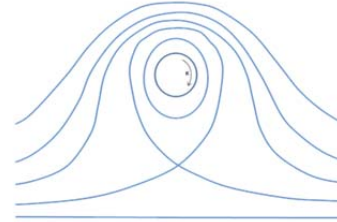
- $\left| \frac{\Gamma}{\pi r_c U_\infty} \right| = 0$: corps immobile et points d'arrêt diamétralement opposés à l'amont et à l'aval du cercle (cas a) ;
- $\left| \frac{\Gamma}{\pi r_c U_\infty} \right| = 2$: corps en rotation, et points d'arrêt sur ce corps, à des angles de respectivement 30° et 150° par rapport à l'attaque amont (cas b) ;
- $\left| \frac{\Gamma}{\pi r_c U_\infty} \right| > 4$: corps en rotation, et un seul point d'arrêt éloigné du corps (cas c).



(cas a)



(cas b)



(cas c)

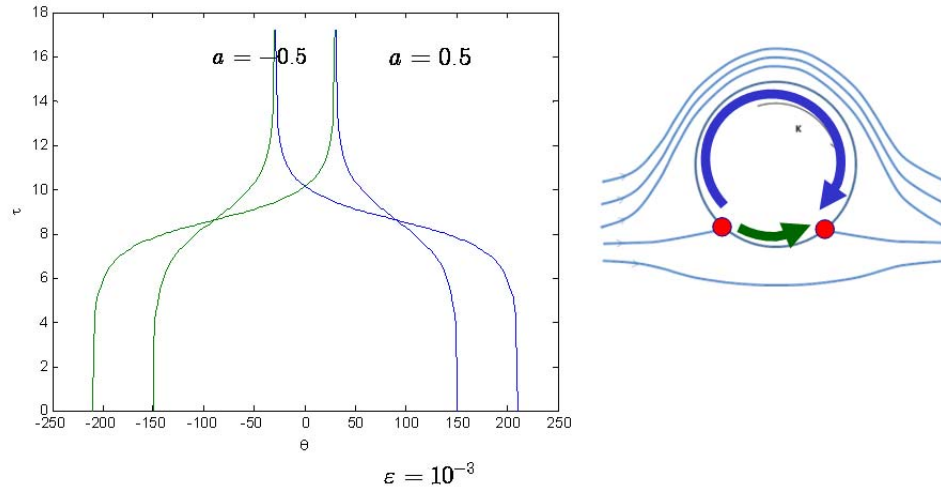
Pour des valeurs croissantes du paramètre $\frac{\Gamma}{\pi r_c U_\infty}$, les points d'arrêts se rapprochent donc l'un de l'autre, pour finalement ne former qu'un et s'éloigner du corps.

Il est également possible d'étudier le temps de parcours d'un fluide en écoulement autour d'un tel corps. Ce temps de parcours (6.119) est évalué grâce à la vitesse angulaire :

$$\begin{aligned} v_\theta = \frac{ds}{dt} &= -2U_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_c} \Rightarrow \frac{ds}{-2U_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_c}} = dt \\ \Rightarrow \frac{-r_c d\theta}{\sin \theta - \frac{\Gamma}{4U_\infty \pi r_c}} &= 2U_\infty dt \Rightarrow \frac{-d\theta}{\sin \theta - \frac{\Gamma}{4U_\infty \pi r_c}} = \frac{2U_\infty}{r_c} dt \end{aligned} \quad (6.126)$$

$$\tau_{\text{parcours}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{-d\theta}{\sin \theta - a} \quad \text{avec} \quad a = \frac{\Gamma}{4U_\infty \pi r_c} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{2U_\infty}{r_c} t \quad (6.127)$$

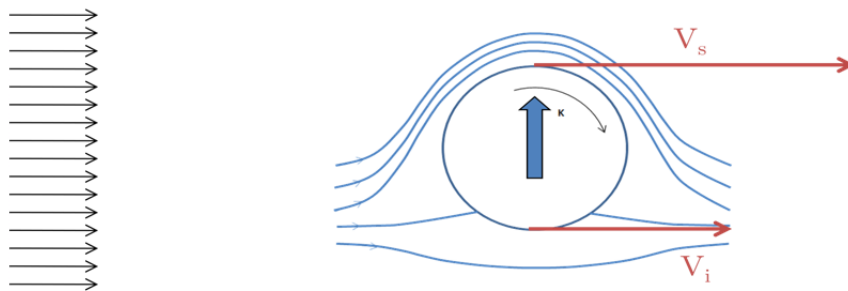
Comme pour le cas sans circulation, les temps de parcours restent identiques.



Enfin, la distribution de pression autour du corps peut être étudiée en ayant recours à l'équation de Bernoulli. En considérant une pression de référence à un point de stagnation, on obtient

$$\begin{aligned}
 p &= p_0 - \rho \frac{v_\theta^2}{2} \\
 &= p_0 - \frac{\rho}{2} \left(2U_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_c} \right)^2
 \end{aligned}
 \quad (6.128)$$

La distribution est donc symétrique par rapport à l'axe des y , ce qui se traduit par une absence de traînée. Par contre, la distribution n'est pas symétrique par rapport à l'axe des x , il existe dès lors une portance, ce qui est connu sous le nom d'effet Magnus-Robins. Cet effet, décrit plus précisément ci-dessous, est bien connu des sportifs et donne l'explication physique à l'effet mis par exemple dans les ballons de football et dans les balles de tennis. En résumé, un objet en rotation dans un fluide subira une force de portance directement proportionnelle à la vitesse de rotation.

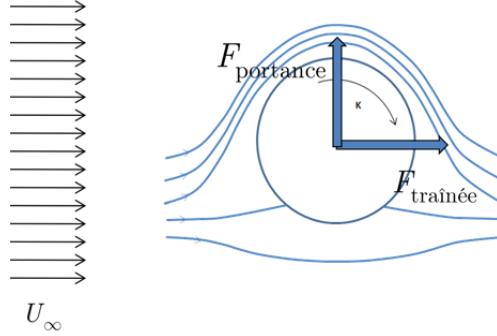


L'explication vient du fait qu'en tournant, la vitesse sur une des parties du corps (en haut sur la figure ci-dessus) est plus grande que sur l'autre partie. Ainsi, selon la loi de Bernoulli, la pression varie inversement ; sur la figure, la pression au dessus est plus faible que la pression en dessous. Cela donne lieu à une force de portance qui dévie le corps (vers le haut sur la figure).

Les forces de portance et traînée prennent ici les expressions suivantes :

$$F_{lift} = - \int_0^{2\pi} p_{c,rel} \cdot \sin \theta \cdot r_c \, d\theta \quad (6.129)$$

$$F_{drag} = - \int_0^{2\pi} p_{c,rel} \cdot \cos \theta \cdot r_c \, d\theta \quad (6.130)$$



Par Bernoulli, on peut écrire :

$$\frac{p_\infty}{\rho g} + \frac{U_\infty^2}{2g} = \frac{p_c}{\rho g} + \frac{1}{2g} \left(2U_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_c} \right)^2 \quad (6.131)$$

$$p_c = p_\infty + \rho \frac{U_\infty^2}{2} - \rho \frac{1}{2} \left(2U_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_c} \right)^2 \quad (6.132)$$

$$p_{c,rel} = \rho \frac{U_\infty^2}{2} - \rho \frac{1}{2} \left(2U_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_c} \right)^2 \quad (6.133)$$

La force de portance est obtenue en remplaçant la valeur de $p_{c,rel}$ de l'équation (6.133) dans l'équation (6.129) :

$$F_{lift} = - \int_0^{2\pi} \left[\rho \frac{U_\infty^2}{2} - \rho \frac{1}{2} \left(2U_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_c} \right)^2 \right] \sin \theta r_c \, d\theta \quad (6.134)$$

Donc :

$$F_{lift} = -\rho U_\infty \Gamma \quad (6.135)$$

De manière tout à fait générale, le théorème de Kutta-Joukowski prouve que cette formule est applicable à tous les corps :

« Selon la théorie des fluides parfaits, la portance par unité d'épaisseur de tout corps immergé dans un fluide possédant un champ de vitesse uniforme vaut :

$$F_{lift} = -\rho U_\infty \Gamma \quad (6.136)$$

Γ représente la circulation totale contenue dans le corps. »

Dans un fluide faiblement visqueux, une rotation du cylindre peut engendrer une circulation alors que dans un fluide parfait non. Dans le cas du fluide parfait, il n'existe ainsi pas de critère pour déterminer la circulation autour d'un corps réel.

La force de traînée est quant à elle calculée au moyen de la formule (6.130) et (6.133) :

$$F_{drag} = \int_0^{2\pi} \left[\rho \frac{U_\infty^2}{2} - \rho \frac{1}{2} \left(2U_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_c} \right)^2 \right] \cos \theta b r_c d\theta \quad (6.137)$$

Et donc :

$$F_{drag} = 0 \quad (6.138)$$

Cette constatation paraît relativement étrange ; c'est pourquoi le paradoxe de d'Alembert est naturellement énoncé comme suit :

« La force exercée sur un corps arbitraire qui se meut dans un fluide parfait incompressible à vitesse constante selon une trajectoire rectiligne est nulle, pourvu que $\Gamma=0$ »

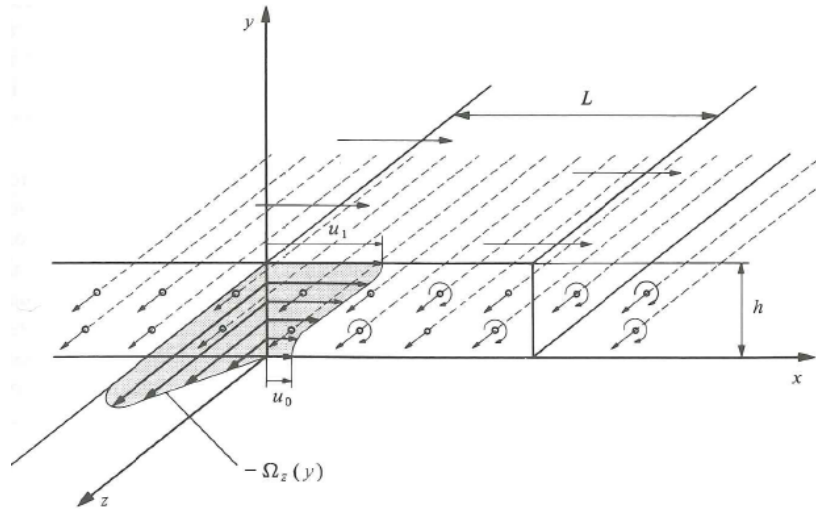
L'explication de ce phénomène est prouvée par l'absurde. Si l'on suppose que la force de traînée n'est pas nulle, la puissance mécanique qui en découle $P = F_{drag} \cdot U_\infty$ devrait être transformée au sein du fluide en chaleur ou en énergie cinétique soit sous forme d'un transport en aval de l'énergie interne croissante, soit sous forme d'un transport de l'énergie cinétique croissante sous forme de mouvement ondulatoire. Or ces deux transpositions d'énergie sont impossibles car, d'une part, dans un fluide parfait, il n'y a pas de dissipation d'énergie et, d'autre part, il n'y a pas de phénomènes ondulatoires liés à l'écoulement d'un fluide incompressible dans un milieu d'étendue infinie.

Il est important de remarquer que le paradoxe de d'Alembert ne s'applique pas :

- pour un fluide visqueux
- en présence d'un mouvement instationnaire
- en présence d'un mécanisme de transport d'énergie ou de quantité de mouvement (ondes de surface à la surface libre d'un fluide idéal)

5.2.3. Couche tourbillonnaire

Un mouvement plan relativement simple peut être représenté par une série continue de fils tourbillonnaires. Si dans les directions x et z les lignes tourbillonnaires s'étendent jusqu'à l'infini, le profil de vitesse résultant sera uniquement dans la direction x .



Si l'épaisseur h de la nappe tourbillonnaire tend vers zéro, il est possible de représenter un changement brusque de vitesse de u_0 à u_1 . Il est assez simple de calculer la circulation Γ :

$$\Gamma = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\oint_C \vec{U} \cdot d\vec{r} \right) \quad (6.139)$$

Or par la formule de Stokes :

$$\oint_C \vec{U} \cdot d\vec{r} = \int_A \vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{U}) dA \quad (6.140)$$

Ainsi, on peut écrire :

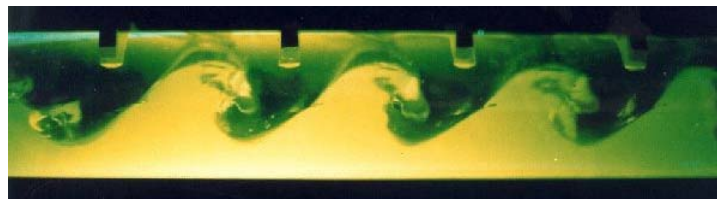
$$\Gamma = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_A \vec{n} \cdot \vec{\Omega} dA \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-L \int_0^h \Omega_z dy \right) = (u_1 - u_0) L \quad (6.141)$$

La vitesse tangentielle change de façon discontinue au travers de la couche ; c'est pourquoi on l'appelle la « couche de discontinuité ». L'intensité de la couche est définie par unité de longueur :

$$u_1 - u_0 = \gamma = \frac{\Gamma}{L} \quad (6.142)$$

Ce système tourbillonnaire est souvent utilisé pour représenter une couche de cisaillement dans les fluides à faible viscosité (couche limite à la paroi, sillage,...).

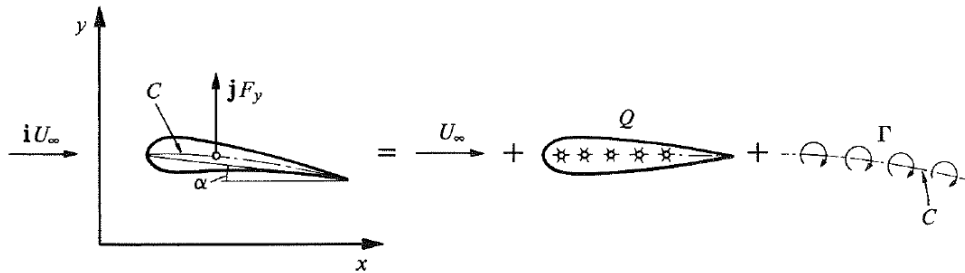
Dans le cas d'un fluide parfait, la couche sera transportée et déformée de manière stable tandis que pour un fluide visqueux, la couche tourbillonnaire sera diffusée voire instable.



6. Écoulement idéalisé autour d'une aile

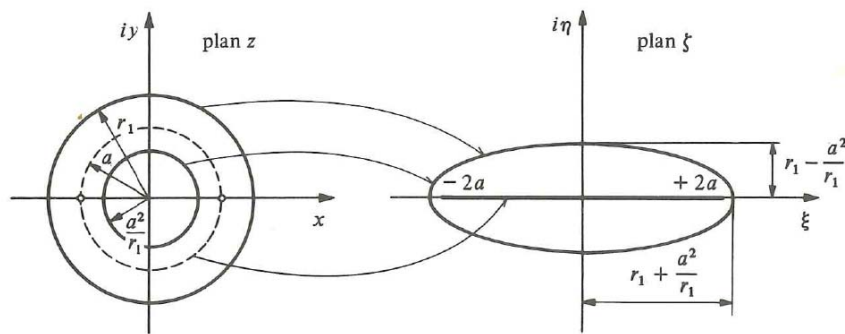
Les profils d'ailes sont conçus pour développer une portance importante avec une trainée faible. Historiquement, l'écoulement autour d'un tel corps a été approché par le principe de superposition (figure ci-dessous) :

- d'un écoulement homogène et parallèle
- d'une combinaison de dipôles sur un corps symétrique
- d'une couche tourbillonnaire selon sa ligne de cambrure



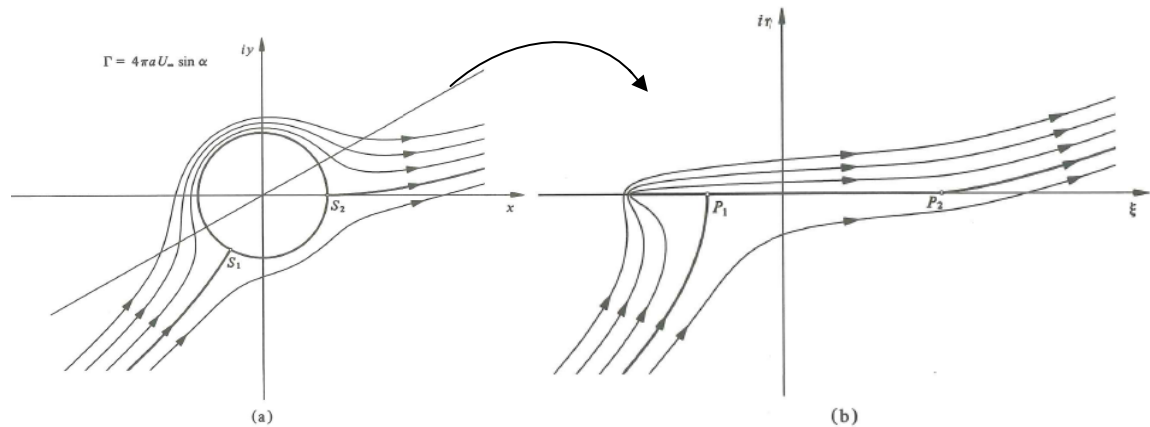
Cette approche est cependant peu intéressante car si l'on résout le problème direct, le profil d'aile est un résultat ; ce qui est peu utile en pratique. D'autre part, si on résout le problème indirect, il faut caractériser les intensités des dipôles, la circulation totale ainsi que sa distribution spatiale.

Une seconde approche consiste en l'utilisation des mathématiques des nombres complexes et de la transformation conforme. Le principe de cette méthode consiste à utiliser des solutions d'écoulement connues pour des cas simples (cercle) et les transposer dans un autre plan pour obtenir une géométrie complexe. La transformation de Joukowski est par exemple utilisée pour passer d'un cercle de rayon a à un plan.



$$\begin{aligned} \zeta &= z + \frac{a^2}{z} \quad \text{où } a \text{ est un nombre réel} \\ z &= x + iy \\ \zeta &= \xi + i\eta \end{aligned} \tag{6.143}$$

Si en plus de cette transformation, une combinaison d'un écoulement uniforme formant un angle α avec l'horizontale et un dipôle formant le cercle sont ajoutés, la transformation conforme représente un plan soumis à un écoulement pour lequel il existe deux points de vitesse infinie en P_1 et P_2 . Si on ajoute en plus une circulation au cercle, les vitesses passant sur (extrados) et sous (intrados) la plaque plane sont identiques et par conséquent l'écoulement autour d'une plaque plane est bien représenté (figure ci-dessous).



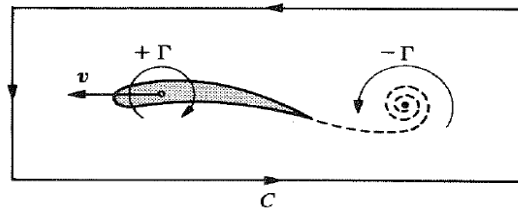
Si le potentiel des forces extérieures est nul, la théorie indique que les vitesses aux bords d'attaque et de fuite tendent vers l'infini. En pratique cependant, les vitesses ne sont pas infinies et un décollement de l'écoulement est observé sur l'extrados de l'aile dans le cas de la plaque plane. Dans les applications réelles, le bord d'attaque est arrondi ; cela permet d'éviter les décollements de l'écoulement.

Pour le bord de fuite par contre le traitement est différent. En effet, différentes valeurs de circulation sur une aile donnent lieu à des comportements de l'écoulement bien différents. La meilleure configuration est celle pour laquelle l'écoulement intrados et extrados se quitte au bord de fuite de manière douce ; c'est-à-dire dans le cas où la vitesse de fuite à l'extrados est la même que la vitesse de fuite à l'intrados. En pratique, le bord de fuite est assez tranchant pour que les vitesses de fuite y sortant puissent être égales. Pour obtenir cette égalité de vitesses la condition de Kutta doit être respectée :

$$\Gamma = \Gamma_{Kutta} \quad (6.144)$$

Cependant, comme la circulation de l'aile change avec la vitesse de l'air et l'angle d'attaque, elle doit s'adapter constamment lors d'une accélération ou d'un changement d'angle d'attaque de manière à vérifier la condition de Kutta. De plus, comme le théorème de Kelvin dit que la variation temporelle de la circulation doit être nulle, une couche tourbillonnaire doit être créée

derrière l'aile pour que la circulation totale soit conservée (figure ci-dessous). Cette couche est instable et tend à s'enrouler en un tourbillon dit « de démarrage ».



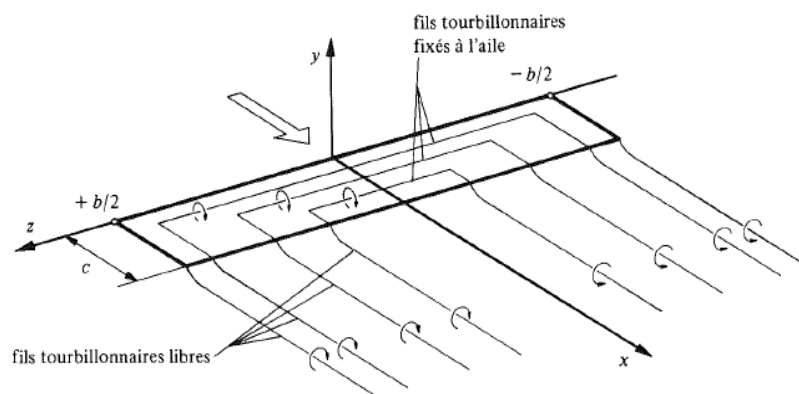
Lorsque la vitesse de l'aile devient constante, le tourbillon $-\Gamma$ s'éloigne et n'influence plus l'écoulement autour de l'aile ; le mouvement devient alors stationnaire. A chaque nouvelle accélération, un tourbillon de démarrage est créé.

Pour une aile d'envergure infinie, c'est logiquement une couche tourbillonnaire de longueur infinie selon l'axe z qui est utilisée pour représenter la portance mais, pour un profil tridimensionnel fini d'aile, les lignes tourbillonnaires doivent être placées différemment. En effet, selon le théorème d'Helmholtz :

- un fil tourbillonnaire ne peut prendre naissance ou s'éteindre dans le fluide
- sa longueur doit être infinie ou être une courbe fermée

La couche tourbillonnaire prend donc la forme d'un fer à cheval s'étendant depuis l'aile et se prolongeant dans son sillage. Pour une aile à trois dimensions, il y a toujours une surpression sur l'intrados et une dépression sur l'extrados mais en bout d'aile, la pression doit être équivalente sur l'extrados et l'intrados et la circulation tendre vers zéro. Ainsi, comme le dessin ci-dessous le montre, une aile 3D est composée :

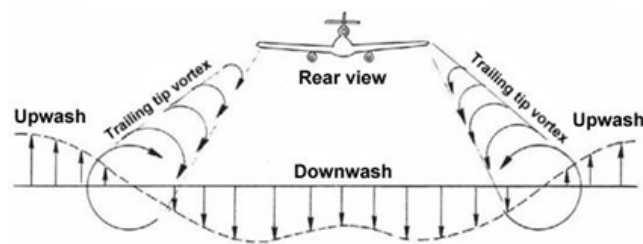
- d'une couche tourbillonnaire **fixée** sur l'aile produisant le différentiel de pression (portance)
- d'une couche tourbillonnaire **libre**, résultat direct de la variation de circulation le long de l'envergure, qui génère une discontinuité dans les vitesses tangentielles selon z comme expliqué par l'équation (6.142)



Aux deux bouts d'ailes, la discontinuité dans les vitesses génère un écoulement de contournement. Lorsque la couche tourbillonnaire formée par les fils tourbillonnaires libres s'éloigne de l'aile, elle a donc tendance à s'enrouler pour former un tourbillon de bout d'aile (voir figure ci-dessous) car cette couche est instable (cf. théorie de la couche tourbillonnaire).



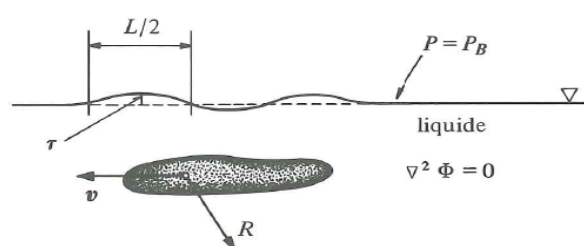
Les oiseaux migrateurs utilisent cet effet d'enroulement des tourbillons car il donne lieu à une remontée de l'air (upwash) et provoque donc un effet portant à l'extérieur du sillage de l'oiseau leader (voir figure ci-dessous). Les oiseaux qui profitent du sillage de l'oiseau leader voient ainsi leurs portances augmentées et leurs trainées diminuées s'ils positionnent leurs ailes avec moins d'incidence. Cela diminue la fatigue tout en augmentant l'endurance des oiseaux.



7. Ecoulement irrotationnel à surface libre d'un fluide incompressible

7.1. Description du problème

Un corps se déplaçant à la surface libre (ou proche de celle-ci) crée un système de vagues qui se propage à la surface libre.



En toute généralité, ce mouvement est bien entendu instationnaire, et le système d'équations à résoudre est donc celui présenté en (6.50), soit

$$\begin{cases} \vec{U} = \nabla\phi \\ \Delta\phi = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathcal{K} = C(t) \\ \mathcal{K} = G + \frac{p}{\rho} + \frac{\|\nabla\phi\|^2}{2} \end{cases} \quad (6.145)$$

Dans le cas où le système est soumis à la gravité seule, on a alors, pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + gz + \frac{p}{\rho} + \frac{\|\nabla\phi\|^2}{2} = C(t) \quad (6.146)$$

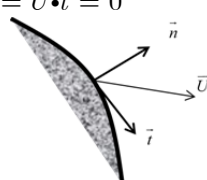
Avec les conditions aux limites suivantes :

- à la surface du corps, condition d'imperméabilité ;
- à la surface libre, pression de référence ;
- au fond du liquide, conditions d'imperméabilité.

Pour exprimer ces conditions aux limites physiques mathématiquement, en toute généralité, on peut affirmer que les particules fluides, aux parois des corps imperméables, adhèrent à ces mêmes parois :

$$\vec{U}\Big|_{\text{fluide à la paroi}} = \vec{W}\Big|_{\text{surface du corps}} \quad (6.147)$$

Dans le cas particulier d'un corps fixe, cette expression dégénère et prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \vec{U}\Big|_{\text{fluide à la paroi}} &= 0 \\ \vec{U} \cdot \vec{n} &= \vec{U} \cdot \vec{t} = 0 \end{aligned} \quad (6.148)$$


Si le fluide est parfait, la vitesse tangentielle au contact du corps n'a pas de raison d'être nulle. Le problème est alors singulier et la condition de corps imperméable sur la vitesse normale est suffisante. (6.147) devient donc finalement :

$$\vec{U} \cdot \vec{n} = \vec{W} \cdot \vec{n} \quad (6.149)$$

Afin de représenter la surface libre, et plus précisément l'évolution de celle-ci suite au mouvement du corps immergé, imaginons une fonction F décrivant la surface imperméable de ce dernier.

Si l'on suppose :

$$F(\vec{r}, t) = 0 \quad (6.150)$$

Un observateur se déplaçant avec le corps observera que la fonction F ne peut subir de modification au cours du temps, dès lors :

$$\frac{D}{Dt} F(\vec{r}, t) = 0 = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{W} \cdot \nabla F \quad (6.151)$$

Le gradient de la fonction F étant dirigé par définition selon la normale à la surface du corps, on a finalement :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{W} \cdot \nabla F = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla F = 0 \quad (6.152)$$

Dans un repère cartésien xy , il est possible de définir un profil bidimensionnel fixe, selon

$$y = h(x), y > 0 \quad (6.153)$$

de manière telle que

$$F(x, y) = y - h(x) = 0 \quad (6.154)$$

Ainsi, les différents termes de l'équation (6.152) deviennent respectivement :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h'(x) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.155)$$

Et (6.152) devient :

$$\begin{aligned} \frac{DF}{Dt} = 0 + \vec{U} \cdot \begin{pmatrix} -h'(x) \\ 1 \end{pmatrix} &= -uh'(x) + v = 0 \\ \frac{v}{u} &= h'(x) \end{aligned} \quad (6.156)$$

L'ensemble du corps imperméable correspond ainsi à une ligne de courant particulière étant donné que (6.156) peut s'exprimer comme :

$$\frac{v}{dh} = \frac{u}{dx} \quad (6.157)$$

Maintenant que la condition cinématique d'imperméabilité a été détaillée de façon très générale, il est possible d'exprimer mathématiquement les trois conditions aux limites du problème :

- à la surface du corps, $\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{corps} = 0 \quad (6.158)$

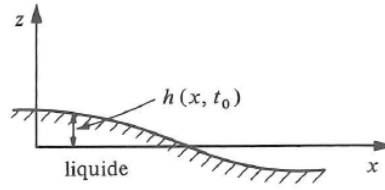
- à la surface libre, $p_{SL} = p_{ref} \quad (6.159)$

- au fond du liquide, $\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{fond} = 0 \quad (6.160)$

Les relations (6.145), (6.158), (6.159), (6.160) sont habituellement très complexes à résoudre du fait de la non-linéarité de la conservation de la quantité de mouvement.

7.2. Houle parfaite

L'étude de la houle irrotationnelle en profondeur infinie, dite houle parfaite, suit le même formalisme que l'analyse présentée au point précédent. Cependant, la houle, déformation de la surface libre, ne sera pas obtenue comme résultat du mouvement du fluide mais sera imposée et considérée comme imperméable.



Dans le plan 2D xz , une vague peut être représentée par le profil bidimensionnel suivant :

$$z = h(x, t) \Rightarrow F = z - h(x, t) = 0 \quad (6.161)$$

et la condition cinématique définie en (6.152) devient :

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla F = -\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (6.162)$$

ayant exprimé la vitesse en fonction du potentiel de vitesse ϕ .

En posant l'hypothèse d'une amplitude de la vague τ faible vis-à-vis de la longueur d'onde L ,

soit $\tau \ll L$ et $\frac{\partial h}{\partial x} \ll 1$, on obtient :

$$\frac{DF}{Dt} = -\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (6.163)$$

L'équation (6.146), en reprenant la même hypothèse concernant l'amplitude des ondes et en utilisant la condition limite de pression de référence, peut être linéarisée :

$$\begin{cases} \tau \ll L \Rightarrow \|\nabla \phi\|^2 \ll \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ p_{SL, moyenne} = p_{ref} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + gh = 0 \end{cases} \quad (6.164)$$

Finalement, à la surface libre moyenne, il s'agit de résoudre le système d'équations suivant :

$$\text{en } z = 0 \quad \begin{cases} -\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + gh = 0 \end{cases} \quad (6.165)$$

Et, en éliminant h , ce système peut s'exprimer seulement en terme de ϕ :

$$\Rightarrow \left(g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \Big|_{z=0} = 0 \quad (6.166)$$

qui représente la condition limite générale en $z=0$.

Maintenant que cette condition limite générale est définie, il est possible d'étudier la propagation de vagues sinusoïdales de vitesse c , sous l'hypothèse de conservation de l'amplitude le long d'une trajectoire.

Etant donné cette indépendance d'amplitude à sa trajectoire, le potentiel peut être recherché par la méthode de séparation des variables :

$$\phi(x, z, t) = f(z) \sin \left[\frac{2\pi}{L} (x - ct) \right] \quad (6.167)$$

où il faut déterminer $f(z)$ et la relation liant c et L .

Les différentes équations développées vont donc être exprimées en fonction de ce potentiel particulier.

L'équation de conservation de la masse, matérialisée ici par l'équation de Laplace, donne dès lors

$$\Delta \phi = 0 = f'' - \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 f \quad (6.168)$$

Avec pour solution

$$f = A e^{\frac{2\pi z}{L}} + B e^{-\frac{2\pi z}{L}} \quad (6.169)$$

Ce qui donne, en utilisant la condition limite au fond, dans ce cas à une profondeur infinie :

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} f = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (6.170)$$

$$\phi = A e^{\frac{2\pi z}{L}} \sin \left[\frac{2\pi}{L} (x - ct) \right], z < 0 \quad (6.171)$$

A partir de cette nouvelle expression du potentiel, la condition limite de surface libre, définie en (6.166) donne successivement

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = A \frac{2\pi}{L} e^{\frac{2\pi z}{L}} \sin \left[\frac{2\pi}{L} (x - ct) \right] \quad (6.172)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -A e^{\frac{2\pi z}{L}} \left(\frac{2\pi c}{L} \right)^2 \sin \left[\frac{2\pi}{L} (x - ct) \right] \quad (6.173)$$

$$\begin{aligned}
\left(g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \Big|_{z=0} &= 0 \\
\Rightarrow \frac{2\pi g}{L} - \left(\frac{2\pi c}{L} \right)^2 &= 0 \\
c &= \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}
\end{aligned} \tag{6.174}$$

qui exprime ainsi la célérité de l'onde en fonction de sa longueur d'onde indépendamment de la profondeur.

$$\phi = A e^{\frac{2\pi z}{L}} \sin \left[\frac{2\pi}{L} \left(x - \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} t \right) \right], z < 0 \tag{6.175}$$

Par la première équation de (6.165), on a

$$h|_{z=0} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{2\pi}{L} \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} \frac{A}{g} \cos \left[\frac{2\pi}{L} (x - ct) \right] \tag{6.176}$$

Afin que h à la surface libre moyenne représente l'amplitude de la houle, il faut imposer

$$A = \tau \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} \tag{6.177}$$

Dès lors, le potentiel prend la forme finale :

$$\phi = \tau c e^{\frac{2\pi z}{L}} \sin \left[\frac{2\pi}{L} (x - ct) \right], z < 0 \tag{6.178}$$

Les composantes de la vitesse peuvent être évaluées :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \tau c \frac{2\pi}{L} e^{\frac{2\pi z}{L}} \cos \left[\frac{2\pi}{L} (x - ct) \right] \\ w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \tau c \frac{2\pi}{L} e^{\frac{2\pi z}{L}} \sin \left[\frac{2\pi}{L} (x - ct) \right] \end{cases}, z < 0 \tag{6.179}$$

De même pour les trajectoires :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u(x_0, z_0, t) \\ \frac{dz}{dt} &= w(x_0, z_0, t) \end{aligned} \tag{6.180}$$

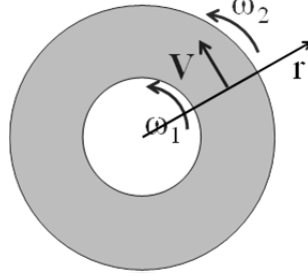
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\tau c e^{\frac{2\pi z_0}{L}} \sin \left[\frac{2\pi}{L} (x_0 - ct) \right] + x_1 \\ z = \tau c e^{\frac{2\pi z_0}{L}} \cos \left[\frac{2\pi}{L} (x_0 - ct) \right] + z_1 \end{cases} \tag{6.181}$$

$$\Rightarrow (x - x_1)^2 + (z - z_1)^2 = \tau^2 e^{\frac{4\pi z_0}{L}} \tag{6.182}$$

L'équation (6.182) représente en fait un cercle de rayon décroissant avec la profondeur.

8. Écoulement irrotationnel entre deux cylindres coaxiaux

Soit deux cylindres coaxiaux en rotation autour de leur centre, à des vitesses angulaires ω_1 et ω_2 respectivement. Le fluide considéré est visqueux et newtonien.



Afin de discuter l'éventuelle existence d'un écoulement irrotationnel entre ces deux cylindres, deux approches sont possibles :

- résolution des équations de Navier-Stokes, avec recherche des conditions suffisantes d'irrotationnalité ;
- imposition de l'irrotationnalité avec recherche des conditions suffisantes.

8.1. Approche par résolution des équations de Navier-Stokes

En coordonnées cylindriques, les équations de Navier-Stokes prennent la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + w \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \\ v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + w \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \\ v_r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w \end{array} \right. \quad (6.183)$$

L'écoulement étant symétrique, il est possible d'écrire les égalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_r = 0 \\ v_\theta = f(r) \\ w = 0 \\ p = f(r) \end{array} \right. \quad (6.184)$$

Et les équations de Navier-Stokes (6.183) se simplifient dès lors :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ 0 = \nu \left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \end{array} \right. \quad (6.185)$$

Ou encore, après transformation du Laplacien de la vitesse tangentielle :

$$\begin{cases} \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} = 0 \end{cases} \quad (6.186)$$

Une solution de la seconde équation peut s'exprimer sous la forme suivante (en utilisant deux constantes A et B) :

$$v_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r} \quad (6.187)$$

En exprimant les conditions limites aux parois, soit le non glissement, il est possible de déterminer les constantes d'intégration A et B :

$$\begin{cases} v_\theta(r = r_1) = \omega_1 r_1 \\ v_\theta(r = r_2) = \omega_2 r_2 \end{cases} \quad (6.188)$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \\ B &= \frac{(\omega_1 - \omega_2) r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \end{aligned} \quad (6.189)$$

$$v_\theta(r) = \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{(\omega_1 - \omega_2) r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r} \quad (6.190)$$

L'expression de la pression est obtenue à partir de la première équation de (6.186), par intégration, en considérant une pression de référence p_1 au contact du cylindre intérieur :

$$p(r = r_1) = p_1 \quad (6.191)$$

$$p(r) = p_1 + \frac{\rho}{(r_2^2 - r_1^2)^2} \left[(\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2)^2 \frac{r^2 - r_1^2}{2} - 2 r_2^2 r_1^2 (\omega_2 - \omega_1) - \omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2 + r_2^4 r_1^4 (\omega_2 - \omega_1)^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \right] \quad (6.192)$$

La condition suffisante pour que l'écoulement ainsi déterminé soit irrotationnel est que le premier terme de (6.190) soit nul, ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} &= 0 \\ \frac{v_{\theta 2}}{v_{\theta 1}} &= \frac{\omega_2 r_2}{\omega_1 r_1} = \frac{r_1}{r_2} \end{aligned} \quad (6.193)$$

Et les expressions (6.190) et (6.192) deviennent :

$$\begin{aligned} v_\theta(r) &= \omega_1 \frac{r_1^2}{r} \\ p &= p_1 + \frac{\rho \omega_1^2 r_1^2}{2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (6.194)$$

La vitesse tangentielle adopte l'expression d'un vortex libre avec une valeur particulière de la circulation.

8.2. Approche par imposition de l'irrotationnalité

Afin d'imposer l'irrotationnalité pour l'écoulement entre les deux cylindres concentriques en rotation, la condition suivante est, par définition, nécessaire et suffisante :

$$\nabla \times \vec{U} = \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right] = (0, 0, 0) \quad (6.195)$$

Si l'écoulement est irrotationnel, le potentiel est défini et :

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ v_\theta|_{r_1} = v_{\theta 1} \\ v_\theta|_{r_2} = v_{\theta 2} \end{cases} \quad (6.196)$$

L'écoulement étant symétrique, la vitesse radiale est nulle et la vitesse tangentielle est uniquement fonction de r :

$$\begin{aligned} v_r &= 0 \\ v_\theta &= f_1(r) \end{aligned} \quad (6.197)$$

Dès lors (6.196) et (6.197) permettent d'écrire :

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = f_1(r) \end{cases} \quad (6.198)$$

Le potentiel est ainsi seulement dépendant de θ :

$$\begin{cases} \phi = f_2(\theta) \\ \frac{\partial f_2(\theta)}{\partial \theta} = r f_1(r) \end{cases} \quad (6.199)$$

Les deux membres de la seconde relation de (6.199) étant uniquement dépendants de variables différentes, cela ne peut définir qu'une constante :

$$\frac{\partial f_2(\theta)}{\partial \theta} = r f_1(r) = A \quad (6.200)$$

$$\Rightarrow \phi = A \theta \quad (6.201)$$

En imposant les conditions aux limites (6.188), grâce à la définition du potentiel (6.201) :

$$\begin{cases} v_{\theta}|_{r_1} = \omega_1 r_1 = \frac{A}{r_1} \\ v_{\theta}|_{r_2} = \omega_2 r_2 = \frac{A}{r_2} \end{cases} \quad (6.202)$$

Il est possible de trouver A :

$$A = r_1^2 \omega_1 = r_2^2 \omega_2 \quad (6.203)$$

Et ainsi exprimer la condition d'existence sur les vitesses pour un écoulement irrotationnel :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1}{\omega_2} &= \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \\ \frac{v_{\theta 1}}{v_{\theta 2}} &= \frac{r_2}{r_1} \end{aligned} \quad (6.204)$$

qui est identique à (6.194).

8.3. Conclusion

Au vu des résultats des deux démonstrations précédentes, la conclusion suivante peut être énoncée :

« Un écoulement irrotationnel entre deux cylindres en rotation est possible pour autant que les vitesses de rotations des cylindres varient de façon inversement proportionnelle au rayon »

$$\frac{v_{\theta 1}}{v_{\theta 2}} = \frac{r_2}{r_1} \quad (6.205)$$

Il est important de remarquer que cette conclusion est valable quelle que soit la viscosité du fluide.

Dans le cas d'un fluide parfait, la rotation des cylindres n'entraînerait pas de mouvement du fluide puisqu'il n'existe pas de viscosité. Dès lors il n'existerait aucune interaction fluide-solide.

Chapitre 7 : Ecoulements internes

Objectifs

- Expliquer l'origine des pertes de charge
- Caractériser les propriétés de la couche limite
 - en régime d'écoulement laminaire
 - en régime d'écoulement turbulent
- Etablir et analyser des solutions exactes d'écoulements visqueux :
 - Ecoulement de Stokes
 - Ecoulement de Couette
 - Ecoulement de Poiseuille
 - Ecoulement en fine lame
- Généraliser l'équation de Bernoulli en conduite
- Etablir rigoureusement les formulations pratiques pour l'ingénieur du calcul des pertes de charge

1.	Introduction	199
1.1.	Perte de charge	199
1.2.	Diffusion de la vorticité	200
2.	Couche limite laminaire	202
2.1.	Ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite	202
2.2.	Evolution spatiale de la couche limite	205
2.2.1.	Equations de Prandtl.....	206
2.2.2.	Approche macroscopique	208
2.3.	Prise en compte du gradient de pression	213
3.	Couche limite turbulente	216
3.1.	Détermination du profil de vitesse.....	216
3.1.1.	Position du problème	216
3.1.2.	Analyse dimensionnelle	218
3.1.3.	Zone 1 du profil de vitesse	219
3.1.4.	Zone 2 du profil de vitesse	219
3.1.5.	Zone 3 du profil de vitesse	222
3.1.6.	Profil universel de vitesse	223
3.2.	Evolution spatiale de la couche limite	225
4.	Comparaison de la couche limite laminaire et turbulente.....	226
4.1.	Au sens du profil de vitesse	227
4.2.	Au sens de l'épaisseur	227
4.3.	Au sens de la traînée induite	227
5.	Notion de régime non établi et établi.....	230
6.	Ecoulement de Stokes	231
6.1.	Introduction.....	231
6.2.	Sphère dans un écoulement homogène.....	232
6.2.1.	Position du problème	232

6.2.2.	Modèle mathématique	233
6.2.3.	Résolution analytique.....	234
6.2.4.	Solution finale	235
6.2.5.	Analyse de la solution	236
6.3.	Paradoxe de Stokes	237
6.4.	Utilité pratique	237
6.4.1.	Viscosimètre	237
6.4.2.	Nanotechnologies.....	238
7.	Solutions analytiques d'écoulements laminaires plans.....	239
7.1.	Formulation générale	239
7.1.1.	Position du problème	239
7.1.2.	Modèle mathématique	239
7.1.3.	Solution analytique	240
7.1.4.	Analyse des tensions visqueuses	240
7.1.5.	Notion de vitesse moyenne.....	241
7.2.	Ecoulement de Couette	241
7.3.	Ecoulement de Poiseuille.....	241
8.	Écoulements en films minces	242
8.1.	Formulation générale	242
8.1.1.	Position du problème	242
8.1.2.	Analyse dimensionnelle	242
8.1.3.	Modèle mathématique	244
8.2.	Applications pratiques	244
9.	Écoulements en conduite	245
9.1.	Introduction	245
9.2.	Intégration de Bernoulli sur la section mouillée.....	246
9.3.	Pertes de charge en conduite	248

9.3.1.	Formulation générique des pertes en long – analyse dimensionnelle.....	249
9.3.2.	Pertes de charge singulières	250
9.4.	Interprétation du théorème de Bernoulli macroscopique	255
10.	Ecoulement laminaire en conduite – Ecoulement de Poiseuille.....	257
10.1.	Position du problème.....	257
10.2.	Etablissement du profil de vitesse	257
10.2.1.	Modèle mathématique.....	257
10.2.2.	Solution analytique	258
10.3.	Vitesse moyenne	259
10.4.	Vitesse maximale	260
10.5.	Perte de charge en long	260
10.6.	Profil des contraintes visqueuses	261
11.	Ecoulement turbulent en conduite.....	262
11.1.	Ecoulement turbulent sur paroi lisse	262
11.1.1.	Validité du profil universel de vitesse	262
11.1.2.	Pertes de charge en long	263
11.2.	Ecoulement turbulent sur paroi rugueuse.....	265
11.2.1.	Notion de rugosité	265
11.2.2.	Expériences de Nikuradse	266
11.2.3.	Pertes de charge en long	266
11.2.4.	Généralisation aux tuyaux industriels	268
11.2.5.	Formulation de Colebrook-White	269
12.	Coefficient d'inégale répartition de vitesse dans Bernoulli intégré.....	269
12.1.	Pour un écoulement laminaire	269
12.2.	Pour un écoulement turbulent.....	270
13.	Récapitulatif des pertes de charge	270
13.1.	Diagramme de Moody-Stanton	270

13.2. Régime laminaire	271
13.3. Régime turbulent lisse.....	271
13.4. Régime turbulent rugueux	272
13.5. Régime transitoire.....	272
13.6. Coefficients de pertes de charges singulières typiques.....	273

1. Introduction

Après avoir étudié en détail les écoulements externes, il est maintenant nécessaire d'appréhender les écoulements internes, plus précisément de caractériser les propriétés d'une « couche limite » et d'en déduire les effets induits sur les corps. En effet, c'est Prandtl qui, en 1940, a introduit le concept de « couche limite ». Il permet d'aborder les notions de pertes visqueuses, au moyen de la modélisation d'une couche restreinte (ou un sillage).

Pour rappel, dans le cas particulier d'un corps imperméable dans un fluide en mouvement, la couche limite va permettre de relier la surface du corps où les conditions aux limites y imposent un mouvement relatif nul et l'écoulement externe déterminé par la théorie des écoulements irrotationnels.

1.1. Perte de charge

La notion de « perte de charge » peut être introduite en partant de la formulation non-conservative des équations de Navier-Stokes valables pour un fluide newtonien incompressible barotrope écrite sous une forme similaire aux équations de Lamb:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{U} = 0 \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} - \vec{U} \times \vec{\Omega} = \vec{F} - \nabla \frac{p}{\rho} - \nabla \left(\frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \right) + \nu \Delta \vec{U} \end{cases} \quad (7.1)$$

Sous les hypothèses que le champ de force est conservateur et que l'écoulement est stationnaire, il vient :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{U} = 0 \\ \nabla \left(\underbrace{G + \frac{p}{\rho} + \frac{\|\vec{U}\|^2}{2}}_{\mathcal{K}=\text{Fonction de Helmholtz}} \right) = \vec{U} \times \vec{\Omega} + \nu \Delta \vec{U} \end{cases} \quad (7.2)$$

Par une multiplication scalaire de l'équation de quantité de mouvement par \vec{U} :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{U} = 0 \\ \vec{U} \cdot \nabla \mathcal{K} = \nu \vec{U} \cdot \Delta \vec{U} \end{cases} \quad (7.3)$$

Où \mathcal{K} , fonction d'Helmholtz, représente la charge de l'écoulement qui va diminuer pour autant que $\nu \vec{U} \cdot \Delta \vec{U} < 0$.

Par facilité, supposons que $\bar{U} \geq 0$. A la surface d'un corps imperméable, la vérification des conditions limites ainsi qu'un raccordement asymptotique de la vitesse de la couche limite avec l'écoulement extérieur induit généralement $\Delta \bar{U} \leq 0$, comme le suggère la Figure 89 :

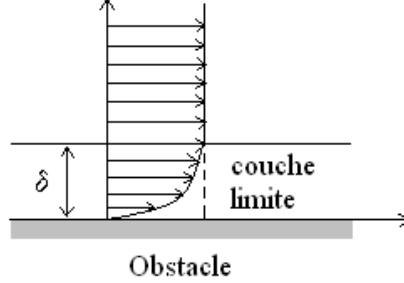


Figure 89 Illustration de l'évolution de la vitesse dans la couche limite

Dès lors, pour un tube de courant passant près de la surface, $\mathcal{K}_{\text{tube}}$ va diminuer dans le sens de l'écoulement. La couche limite est donc bien le lieu d'une perte de charge.

Il est ainsi possible de définir la notion de « sillage » comme la zone rassemblant toutes les lignes de courant passant à proximité de la surface du corps. Dès lors, dans le sillage, la charge y est inférieure à la valeur sur une ligne de courant transitant loin du corps.

Cette notion de perte de charge dans l'écoulement est extrêmement importante étant donné que, par conservation de quantité de mouvement, elle est directement liée à la traînée du corps, c'est-à-dire à la force que le corps subit en retour.

1.2. Diffusion de la vorticité

Un autre comportement de cette couche limite peut être approché en formant le produit vectoriel de la conservation de quantité de mouvement avec l'opérateur ∇ , toujours sous les hypothèses d'un fluide newtonien incompressible barotrope et d'un champ de force conservateur.

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} - \vec{U} \times \vec{\Omega} \right) = \nabla \times \left(-\nabla \mathcal{K} + \nu \Delta \vec{U} \right) \quad (7.4)$$

La distribution de cet opérateur permet plusieurs simplifications grâce aux propriétés de la fonction d'Helmholtz et de la continuité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{U} \times \vec{\Omega}) &= \underbrace{\nabla \times (-\nabla \mathcal{K})}_{=0} + \nu \nabla \times (\Delta \vec{U}) \\ \text{avec } -\nabla \times (\vec{U} \times \vec{\Omega}) &= -(\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{U} - \vec{U} \left[\underbrace{\nabla \cdot \vec{\Omega}}_{\nabla \cdot (\nabla \times \vec{U})=0} \right] + \vec{\Omega} \left[\underbrace{\nabla \cdot \vec{U}}_{=0 \text{ continuité}} \right] + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{\Omega} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Ce qui donne finalement :

$$\frac{D\vec{\Omega}}{Dt} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{U} = \nu (\Delta \vec{\Omega}) \quad (7.6)$$

Une interprétation physique peut en être aisément tirée dans le cas d'un écoulement bidimensionnel étant donné que dans ce cas :

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_z \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Dès lors :

$$(\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{U} = 0 \quad (7.8)$$

$$\frac{D\vec{\Omega}}{Dt} = \nu (\Delta \vec{\Omega})$$

Ou encore :

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} = \nu \Delta \Omega_z = \nu \left(\frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial y^2} \right) \quad (7.9)$$

L'équation (7.9) n'est rien d'autre qu'une équation d'advection-diffusion de la vorticité. Elle signifie pratiquement que la vorticité, rotationnalit , créée principalement par l'adhérence des particules fluides sur une paroi solide, va se propager dans l'écoulement tout en y subissant une diffusion inhérente à la viscosité du fluide.

La couche limite va évoluer à la surface d'un corps solide imperméable. Il est donc extrêmement utile de chercher comment cette évolution va se produire, à la fois en épaisseur et en distribution de vitesses ou de pression. Cette analyse sera utile à la fois pour comprendre finement l'écoulement fluide mais également pour en déduire les efforts induits sur le corps.



Figure 90 Illustration de l'évolution de la couche limite le long d'un corps

Soulignons enfin qu'en 2D sous les hypothèses d'un fluide newtonien incompressible barotrope et d'un champ de force conservateur, il est possible de résoudre cet écoulement grâce à une équation unique en utilisant la fonction de courant. En effet :

$$\begin{aligned}
u &= \frac{\partial \Psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \\
\nabla \times \vec{U} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \Delta \Psi = -\Omega_z
\end{aligned} \tag{7.10}$$

De par sa définition, la continuité est intrinsèquement respectée tandis que la conservation de quantité de mouvement devient :

$$-\frac{\partial(\Delta \Psi)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \Delta \Psi = \nu \Delta \Omega_z = \nu \nabla^4 \Psi \tag{7.11}$$

La formulation obtenue est ainsi très compacte au prix cependant d'un degré élevé des opérateurs de différenciation.

2. Couche limite laminaire

2.1. Ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite

Pour caractériser en première approche l'épaisseur d'une couche limite laminaire, va être étudié, en l'absence de force extérieure, l'écoulement d'un fluide incompressible homogène newtonien induit par un mouvement oscillatoire d'une plaque de longueur infinie .

Si la plaque est orientée selon les axes xz avec un mouvement oscillatoire uniquement orienté selon x , par uniformité selon cet axe, la solution ne peut dépendre de cette coordonnée. La longueur infinie du domaine implique également qu'aucun gradient de pression selon x ne peut se développer. Par conséquent, le système complet

$$\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w
\end{cases} \tag{7.12}$$

La conservation de la masse se simplifie en :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{7.13}$$

Qui implique qu'aucune vitesse ne peut se développer selon y .

Pour déterminer u , la seule équation restante, expression de la conservation de la quantité de mouvement selon x doit utiliser la condition limite imposée par le mouvement oscillatoire de la plaque.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7.14)$$

Le principe de non glissement y impose que :

$$u(y, t)|_{\text{plaque}} = u(0, t) = U_0 \exp(i\omega t) \quad (7.15)$$

Avec U_0 l'amplitude maximale de la vitesse et ω la fréquence de l'oscillation.

L'amplitude de déplacement de la plaque, L , peut ainsi être évaluée comme :

$$L = 2U_0 \int_0^{\pi/2\omega} \cos(\omega t) dt = 2 \frac{U_0}{\omega} \quad (7.16)$$

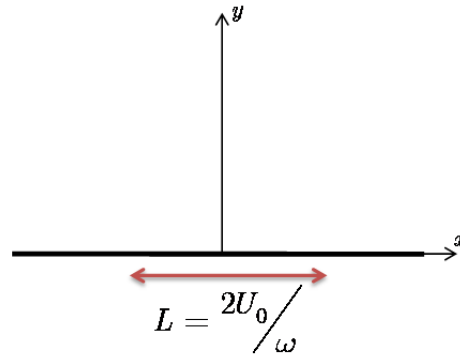


Figure 91 Principe de la plaque oscillante

L'écoulement attendu est uniquement dû à la présence de viscosité dans le fluide. Il existe ainsi un entraînement des particules et une propagation du mouvement oscillatoire. Ainsi, pour obtenir l'ensemble des conditions limites du problème, en $y \rightarrow \infty$, il est licite de supposer que $u \rightarrow 0$.

La solution de l'écoulement peut être obtenue grâce au principe de décomposition des variables. Le champ de vitesse u est ainsi supposé être le produit de deux fonctions des seules variables t et y :

$$u(y, t) = f(t)g(y) \quad (7.17)$$

Ainsi, chaque membre de (7.14) s'exprime comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial(fg)}{\partial t} = g \frac{\partial f}{\partial t} = u \frac{df}{f dt} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2(fg)}{\partial y^2} = f \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = u \frac{d^2 g}{g dy^2} \end{aligned} \quad (7.18)$$

Compte-tenu de l'égalité de deux membres chacun uniquement fonction de variables séparées, il vient :

$$\frac{\frac{df}{dt}}{f} = \nu \frac{\frac{d^2g}{dy^2}}{g} = k = Cte \quad (7.19)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(t) &= C_1 \exp(kt) \\ g(y) &= C_2 \exp\left[-y\left(\frac{k}{\nu}\right)^{1/2}\right] + C_3 \exp\left[y\left(\frac{k}{\nu}\right)^{1/2}\right] \end{aligned} \quad (7.20)$$

Et donc :

$$u(y, t) = C_1 \exp(kt) \left(C_2 \exp\left[-y\left(\frac{k}{\nu}\right)^{1/2}\right] + C_3 \exp\left[y\left(\frac{k}{\nu}\right)^{1/2}\right] \right) \quad (7.21)$$

Les constantes d'intégration C_1 , C_2 et C_3 peuvent être déterminées grâce aux conditions aux limites :

$$u(y, t)\big|_{y \rightarrow \infty} = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \quad (7.22)$$

$$u(0, t) = U_0 \exp(i\omega t) = C_1 C_2 \exp(kt) \Rightarrow \begin{cases} C_1 C_2 = U_0 \\ k = i\omega \end{cases} \quad (7.23)$$

Pour aboutir à l'expression du champ de vitesse :

$$u(y, t) = U_0 \exp\left[i\omega t - y\left(\frac{i\omega}{\nu}\right)^{1/2}\right] \quad (7.24)$$

Compte-tenu que :

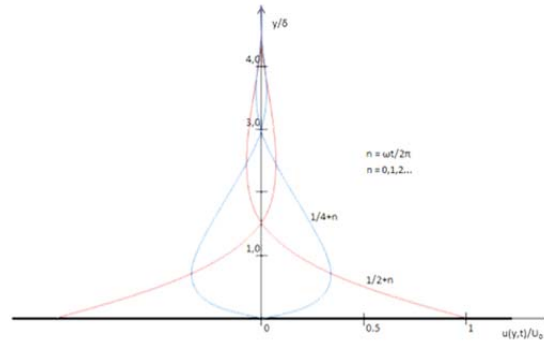
$$\left(\frac{i\omega}{\nu}\right)^{1/2} = \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) = \left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{1/2} (1 + i) \quad (7.25)$$

L'expression finale exploitable, séparant explicitement la dépendance, vis-à-vis de y , de l'amplitude et du mouvement oscillatoire, est :

$$u(y, t) = U_0 \exp\left[-y\left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{1/2}\right] \exp\left[i\left(\omega t - y\left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{1/2}\right)\right] \quad (7.26)$$

L'amplitude des oscillations décroît donc de façon exponentielle avec l'ordonnée. Un ordre de grandeur pertinent d'épaisseur de la couche δ peut être défini par celle où se réduit d'un facteur e^{-1} l'amplitude d'oscillation, soit pour $U_0 e^{-1}$:

$$\delta = \left(\frac{2\nu}{\omega}\right)^{1/2} \quad (7.27)$$

Figure 92 Evolution de l'amplitude des oscillations selon y

Si l'on s'intéresse à l'évolution de cette grandeur caractéristique en fonction de la sollicitation de la plaque, une mise sous forme adimensionnelle adéquate consiste à prendre le rapport de δ avec L :

$$\frac{\delta}{L} = \frac{\left(\frac{2\nu}{\omega}\right)^{1/2}}{2\frac{U_0}{\omega}} = \left(\frac{2\nu}{\omega} \frac{\omega^2}{4U_0^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{\nu}{U_0 L}\right)^{1/2} = \text{Re}^{-1/2} \quad (7.28)$$

Cette opération fait apparaître naturellement un nombre de Reynolds.

Il est ainsi possible de conclure que plus l'écoulement est turbulent plus la couche limite est fine.

Cette conclusion appuie ainsi d'autant plus la séparation réalisée historiquement en un écoulement extérieur et un écoulement intérieur pour les cas couramment observés dans la pratique. A l'inverse, pour un écoulement extrêmement laminaire (dénommé « écoulement de Stokes »), la couche limite sera dominante dans l'entière du domaine.

2.2. Evolution spatiale de la couche limite

Après avoir lié l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite au nombre de Reynolds, une autre caractéristique pertinente est la façon dont l'épaisseur de cette couche limite évolue le long d'un corps. Pour la déterminer, le cas idéalisé consiste à placer une plaque infiniment mince dans un champ de vitesse stationnaire U_0 , uniforme au loin, d'un fluide incompressible homogène et en l'absence de force extérieure.

Cette plaque est placée adéquatement dans le plan xz avec son bord d'attaque aligné sur $(0,0,0)$.

Le problème 3D se transforme ainsi en problème 2D par reproduction infinie selon z .

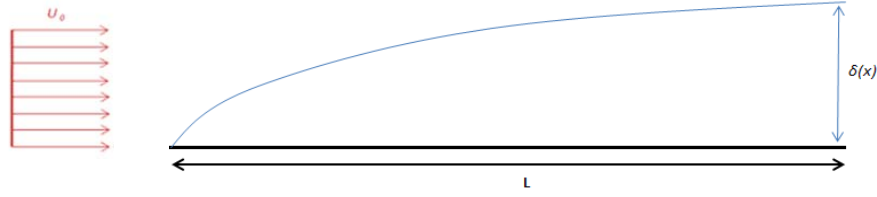


Figure 93 Schéma de principe d'évolution de la couche limite laminaire le long d'une plaque infiniment mince

2.2.1. Equations de Prandtl

Compte-tenu des développements précédents, pour un écoulement dont le Reynolds est largement supérieur à l'unité ($Re \gg 1$), il est licite de supposer que :

- l'épaisseur de la couche limite est faible vis-à-vis de la longueur de la plaque : $\frac{\delta}{L} \ll 1$
- la vitesse selon x est de l'ordre de grandeur de la vitesse au loin $U_0(x) \sim u$

Le système général 3D de Navier-Stokes pour un fluide incompressible (7.12) peut donc se simplifier en ne conservant que le termes non nuls :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (7.29)$$

C'est Prandtl qui, pour la première fois, s'est intéressé à ce système. Une analyse adimensionnelle permet de trouver l'importance relative de chaque terme. Pour ce faire, il est nécessaire de définir des grandeurs caractéristiques :

$$\begin{aligned} u' &= \frac{u}{U_0} & v' &= \frac{v}{v_0} \\ p' &= \frac{p}{p_0} = \frac{p}{\rho \frac{U_0^2}{2}} \\ x' &= \frac{x}{L} & y' &= \frac{y}{\delta} \end{aligned} \quad (7.30)$$

Il est également licite de définir un temps de référence pendant lequel une particule parcourt une distance équivalente dans les différentes directions :

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{L}{U_0} = \frac{\delta}{v_0} \\ \Rightarrow v_0 &= U_0 \frac{\delta}{L} \end{aligned} \quad (7.31)$$

Ce temps de référence permet ainsi de relier v_0 aux autres grandeurs.

Après introduction dans l'équation de continuité, il vient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{U_0}{L} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{v_0}{\delta} \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \\ \frac{U_0}{L} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) &= 0\end{aligned}\quad (7.32)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

La mise sous forme adimensionnelle ne change pas l'équation de continuité.

Par contre, pour la conservation de quantité de mouvement selon x :

$$\begin{aligned}\frac{U_0^2}{L} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{U_0 v_0}{\delta} v' \frac{\partial u'}{\partial y'} &= -\frac{\rho}{\rho L} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \nu \left(\frac{U_0}{L^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{U_0}{\delta^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \\ u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \frac{\nu}{LU_0} \left(\left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right)\end{aligned}\quad (7.33)$$

Etant donné l'hypothèse $\frac{\delta}{L} \ll 1$, il vient que $\left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \sim 0$ et $\left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \sim \infty$. Cette dernière tendance

est heureusement compensée par le fait que $\frac{\nu}{LU_0} = \frac{1}{\text{Re}_L} \sim 0$.

Dès lors, il vient finalement :

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{1}{2} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \frac{\nu}{LU_0} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \quad (7.34)$$

Et pour la conservation de quantité de mouvement selon y :

$$\begin{aligned}\frac{U_0 v_0}{L} u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{v_0^2}{\delta} v' \frac{\partial v'}{\partial y'} &= -\frac{\rho}{\rho \delta} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \nu \left(\frac{v_0}{L^2} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{v_0}{\delta^2} \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) \\ 2 \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + 2 \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 v' \frac{\partial v'}{\partial y'} &= -\frac{\partial p'}{\partial y'} + 2 \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\nu}{U_0 L} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)\end{aligned}\quad (7.35)$$

Ce qui se simplifie finalement en :

$$\frac{\partial p'}{\partial y'} = 0 \quad (7.36)$$

Les équations de Prandtl pour la couche limite laminaire s'écrivent finalement :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (7.37)$$

Ce système ne possède cependant pas de solution analytique, y compris en l'absence de gradient de pression selon x . Dans ce dernier cas, les deux premières équations sont suffisantes pour obtenir un système fermé étant donné qu'il ne reste alors que deux inconnues, u et v .

2.2.2. Approche macroscopique

Principe général

Il est par contre possible de trouver la propriété recherchée par une approche plus « macroscopique » sous une hypothèse additionnelle d'absence de gradient de pression selon x . La méthode consiste alors à définir un volume de contrôle A sur lequel sont appliqués les deux premiers principes de conservation (masse et quantité de mouvement).

Il est très important de remarquer qu'aucune hypothèse ne sera posée, dans l'exposé du principe, sur le régime d'écoulement. Il sera donc applicable sans autre forme pour un régime laminaire ou un régime turbulent.

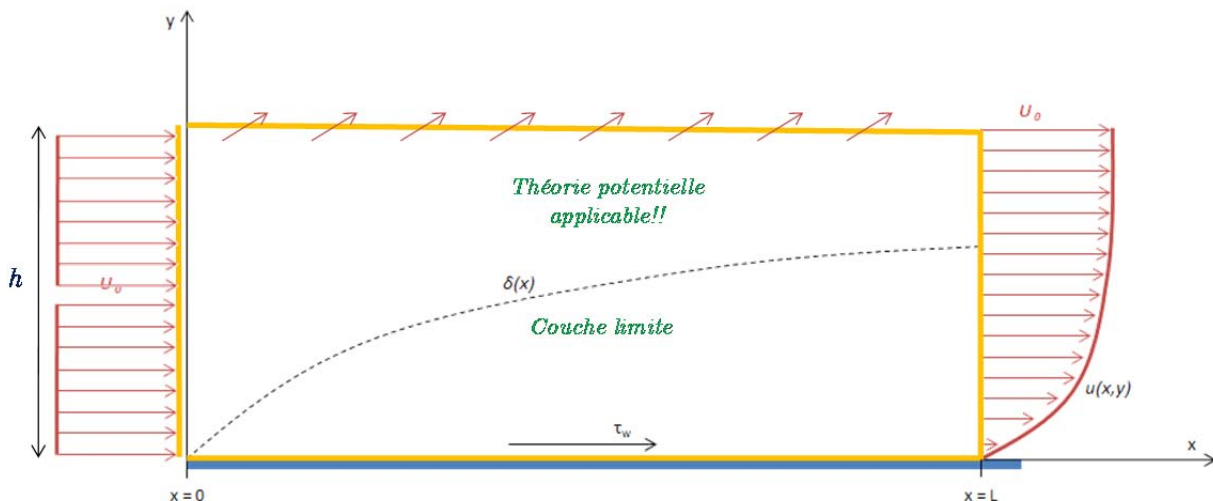


Figure 94 Définition du volume de contrôle autour de la couche limite laminaire

Le bord supérieur du volume de contrôle est tel que $h \gg \delta$ et que l'on peut supposer l'écoulement selon x comme non perturbé

Par continuité, le ralentissement attendu de la vitesse à la paroi induit obligatoirement un échange, inconnu a priori en intensité et en distribution, par le bord supérieur.

Le principe de continuité d'un fluide incompressible homogène demande que l'intégrale des flux normaux au travers de la frontière soit nulle :

$$\begin{aligned}
\int_A (\vec{U} \cdot \vec{n}) dA = 0 &= \int_0^h -u|_{x=0} dy + \int_0^h u|_{x=L} dy + \int_0^L v|_{y=h} dx \\
&= \int_0^h -U_0 dy + \int_0^h u|_{x=L} dy + \int_0^L v|_{y=h} dx
\end{aligned} \tag{7.38}$$

L'application du principe de conservation de quantité de mouvement selon x fournit quant à lui :

$$\begin{aligned}
\int_A u (\vec{U} \cdot \vec{n}) dA &= \frac{1}{\rho} \sum F_x \tag{7.39} \\
\int_A u (\vec{U} \cdot \vec{n}) dA &= \int_0^h \left(u|_{x=L}^2 - u|_{x=0}^2 \right) dh + \int_0^L \left[(uv)|_{y=h} - (uv)|_{y=0} \right] dx \\
&= \int_0^h \left(u|_{x=L}^2 - U_0^2 \right) dh + \int_0^L U_0 v|_{y=h} dx \\
&= \int_0^h u|_{x=L}^2 dh - U_0^2 h + U_0 \underbrace{\int_0^x v dx}_{\text{à trouver par la continuité}} \\
&= \int_0^h u|_{x=L}^2 dh - U_0^2 h + U_0 \int_0^h (U_0 - u|_{x=L}) dy \\
&= \int_0^h u|_{x=L}^2 dh - U_0 \int_0^h u|_{x=L} dy
\end{aligned} \tag{7.40}$$

Etant donné l'hypothèse du gradient de pression nul selon x , la seule force appliquée est la traînée de frottement sur la plaque. Dès lors :

$$F_{\text{traînée}} = \rho \int_0^h [u(U_0 - u)]_{x=L} dy \tag{7.41}$$

Selon le principe d'action-réaction, la force sur la plaque est de direction opposée :

$$F_{\text{plaque}} = -\rho \int_0^h u(U_0 - u) dy \tag{7.42}$$

Mais est aussi égale à :

$$F_{\text{plaque}} = -\int_0^x \tau_0 dx \tag{7.43}$$

Pour la bonne compréhension, il est très important de conserver à l'esprit que la traînée de frottement dans ce cas n'est pas liée à un aspect de rugosité de la plaque qui est par hypothèse totalement lisse.

Il est donc possible de déduire une relation liant les contraintes à la distribution de vitesse :

$$\tau_0 = \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u(U_0 - u) dy = \rho U_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0} \right) dy \tag{7.44}$$

La difficulté de cette expression réside cependant dans la dépendance de la borne supérieure d'intégration à la variable x .

Notion de profil auto-similaire

Un moyen élégant de passer outre la difficulté et d'obtenir une évaluation analytique de cette intégrale est de choisir **un** profil de vitesse **auto-similaire**, c'est-à-dire qu'il possède la même forme quelle que soit l'abscisse x :

$$\frac{u}{U_0} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) = f(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\delta} \quad (7.45)$$

L'introduction de (7.45) dans (7.44) donne :

$$\tau_0 = \rho U_0^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \int_0^1 \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) d\eta \quad (7.46)$$

L'évolution de l'épaisseur de la couche limite apparaît ainsi naturellement en dehors de l'évaluation de l'intégrale.

Pour rappel, jusqu'à ce point, aucune hypothèse n'a été émise sur le régime d'écoulement. La distinction de traitement du régime laminaire et turbulent se fera ainsi sur le choix du profil de vitesse ainsi que sur la liaison théorique possible entre la tension pariétale et cette distribution de vitesse.

Dans un premier temps, les développements seront ainsi effectués pour le cas laminaire. Dans la suite du document (3.2), cette approche macroscopique sera appliquée également au cas turbulent.

Profil auto-similaire de Von Karmann

Plusieurs auteurs ont proposé des formulations de profils auto-similaires. L'une des plus importantes a été introduite par Von Karmann qui considère un profil parabolique dans la couche limite d'épaisseur δ et une vitesse uniforme d'intensité U_0 en dehors.

$$\frac{u}{U_0} = \eta(2 - \eta) = F \quad (7.47)$$

Ce profil respecte bien entendu la compatibilité entre écoulement « intérieur » et « extérieur » : $u(x, \delta) = U_0$ de même que la condition limite de non glissement à la paroi.

Evolution de l'épaisseur de la couche limite

Utilisant (7.47), (7.46) devient :

$$\tau_0 = \rho U_0^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \int_0^1 \eta(2-\eta)(1-\eta(2-\eta)) d\eta = \rho U_0^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \frac{2}{15} \quad (7.48)$$

Ce qui fournit une première relation différentielle d'évolution de δ en fonction de l'abscisse.

Etant donné l'hypothèse d'écoulement laminaire, la tension à la paroi peut être évaluée par la dérivée du champ de vitesse selon y :

$$\tau_0 = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mu \frac{U_0}{\delta} \frac{\partial F}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \mu \frac{U_0}{\delta} \frac{\partial [\eta(2-\eta)]}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 2\mu \frac{U_0}{\delta} \quad (7.49)$$

L'égalisation de (7.48) et (7.49) permet de trouver l'évolution de δ par intégration de l'équation aux dérivées totales ainsi exprimée :

$$15 \frac{\mu}{\rho U_0} dx = \delta d\delta \quad (7.50)$$

$$15 \frac{\mu x}{\rho U_0} + Cste = \frac{\delta^2}{2} \quad (7.51)$$

La constante peut être aisément déterminée étant donné que :

$$\delta \Big|_{x=0} = 0 \quad (7.52)$$

Dès lors :

$$\delta = x \sqrt{30 \frac{\mu}{\rho x U_0}} = x \sqrt{\frac{30}{\text{Re}_x}} \simeq \frac{5.5}{\sqrt{\text{Re}_x}} x \quad (7.53)$$

Il est important de remarquer que dans cette expression, le nombre de Reynolds est exprimé en fonction de l'abscisse x .

Ainsi, à une abscisse donnée fixe, l'épaisseur de la couche limite va diminuer si le Reynolds de l'écoulement augmente. Il s'agit bien de la même conclusion que celle trouvée par l'exemple de la plaque oscillante. Néanmoins, dans tous les cas, δ évolue en fonction de \sqrt{x} .

Analyse de l'effet de traînée sur la plaque

Maintenant que l'évolution de δ est connue, il est possible de trouver l'effet sur la plaque en l'éliminant de l'expression de τ_0 (7.48) ou (7.49) :

$$\tau_0 = \frac{2}{\sqrt{30}} \sqrt{\frac{\mu \rho U_0^3}{x}} \quad (7.54)$$

Ainsi, la tension varie de façon **inversément** proportionnelle à la racine carrée de la distance.

La relation précédente constitue une loi de frottement, c'est-à-dire une liaison entre la tension pariétale et les caractéristiques macroscopiques de l'écoulement et du fluide.

Sur base de (7.54), la traînée de frottement est évaluable sur une demi-plaque de longueur L et de largeur unitaire :

$$F_{\text{traînée}} = \int_0^L \tau_0 dx = \frac{4}{\sqrt{30}} \sqrt{\mu \rho U_0^3} L \quad (7.55)$$

Si, par convention, la traînée est exprimée en fonction de la pression au point de stagnation :

$$F_{\text{traînée}} = C_f L \frac{\rho U_0^2}{2} \quad (7.56)$$

L'expression du coefficient C_f , définissant le coefficient de frottement pariétal :

$$C_f = \frac{8}{\sqrt{30}} \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_0 L}} = \frac{8}{\sqrt{30}} \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} = \frac{1.4606}{\sqrt{\text{Re}_L}} \quad (7.57)$$

Résultats pour le profil auto-similaire de Prandtl

Outre cette expression spécifique, d'autres coefficients peuvent être trouvés selon l'hypothèse choisie pour le profil de vitesse auto-similaire. Par exemple, Prandtl pose :

$$\frac{u}{U_0} = \frac{\eta}{2} (3 - \eta^2) \quad (7.58)$$

Avec comme résultat final :

$$C_f = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}_L}} \quad (7.59)$$

Résultats pour le profil auto-similaire de Blasius

Blasius, quant à lui, propose une formulation particulière du profil de vitesse auto-similaire sous la forme d'une équation différentielle dans le but de trouver une solution exacte aux équations de base :

$$\frac{1}{2} F \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} = 0 \quad (7.60)$$

Cependant, il n'existe pas de solution analytique à cette expression et il est donc nécessaire de recourir à une évaluation numérique :

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \\ v(x, 0) &= 0 \\ u(x, y \rightarrow \delta) &= U_0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} F(\eta = 0) &= 0 \\ F'(\eta = 0) &= 0 \\ F'(\eta \rightarrow \infty) &\rightarrow 1 \end{aligned} \quad (7.61)$$

L'épaisseur de la couche limite a dans ce cas été choisie comme l'ordonnée où la vitesse correspond à 99% de la vitesse externe :

$$\delta_{99\%} \left(\frac{U_0}{\nu x} \right)^{1/2} \approx 5$$

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{5}{\text{Re}^{1/2}} \quad (7.62)$$

η	f	f (Ref)	f'	f' (Ref)	f''	f'' (Ref)
0	0	0	0	0	0.3324149	0.3320571
0.5	0.0415374	0.0414928	0.1660637	0.1658851	0.3312661	0.3309107
1.0	0.1657495	0.1655716	0.3301327	0.3297798	0.3233453	0.3230069
1.5	0.3705335	0.3701382	0.4873017	0.4867890	0.3028761	0.3025803
2.0	0.6507098	0.6500239	0.6304093	0.6297654	0.2669765	0.2667514
2.5	0.9973429	0.9963104	0.7519941	0.7512593	0.2175484	0.2174115
3.0	1.3982207	1.3968070	0.8468255	0.8460440	0.1614126	0.1613603
3.5	1.8395053	1.8376970	0.9138312	0.9130400	0.1077642	0.1077726
4.0	2.3079460	2.3057450	0.9562963	0.9555179	0.0641969	0.0642341
4.5	2.7927180	2.7901320	0.9802722	0.9795140	0.0339409	0.0339809
5.0	3.2862317	3.2832720	0.9922822	0.9915417	0.0158770	0.0159068
5.5	3.7838969	3.7805700	0.9976076	0.9968786	0.0065906	0.0065786

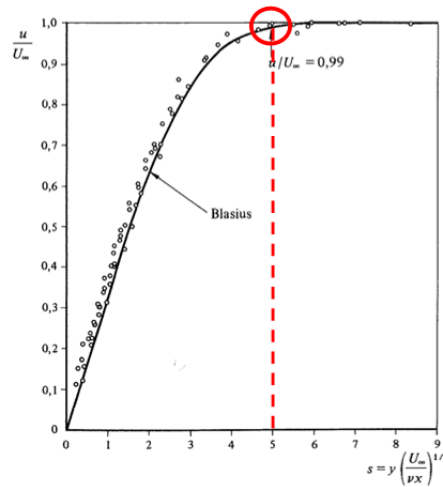


Figure 95 Solution numérique de l'évolution de la vitesse selon l'épaisseur de la couche limite

2.3. Prise en compte du gradient de pression

Dans les développements macroscopiques précédents, le gradient de pression selon x a été négligé. Il n'existe pas de développements analytiques exacts prenant en compte ce gradient de pression. Néanmoins, son effet physique peut être démontré facilement.

En partant de (7.37), il est possible de mettre en évidence le terme de gradient de pression au droit de la surface de la plaque, en y exploitant les conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} = \frac{\rho}{\mu} \left[\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} \right] \Big|_{y=0} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{y=0} \quad (7.63)$$

Ainsi, un gradient négatif, c'est-à-dire une pression qui décroît dans le sens de l'écoulement induit un effet **stabilisant**. A contrario, un gradient **positif donne un effet déstabilisant** sur le profil de vitesse $u(y)$.

En effet, la condition de raccordement asymptotique de la vitesse à la borne supérieure de la couche limite impose une dérivée seconde négative. Si le gradient de pression est négatif, le signe de cette dérivée seconde est unique.

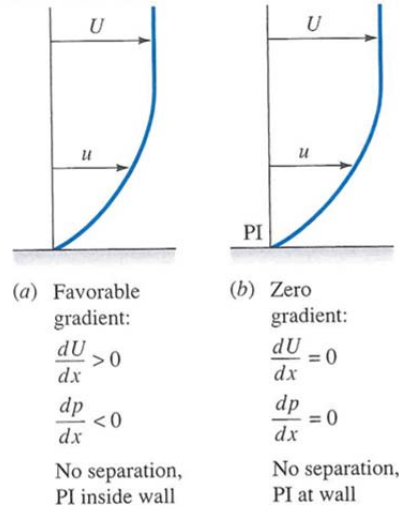


Figure 96 Effet d'un gradient négatif ou nul de pression sur le profil de vitesse

Ce n'est pas le cas dans le cas contraire et il y a donc obligatoirement passage par 0 quelque part à l'intérieur de la couche limite.

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} > 0 \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y \rightarrow \delta} < 0 \quad (7.64)$$

Un point d'inflexion existe donc dans le profil de vitesse. En fonction de l'importance de ce gradient, une inversion de vitesse peut se produire au voisinage de la paroi, ce qui aura pour incidence un **décollement** de la couche limite.

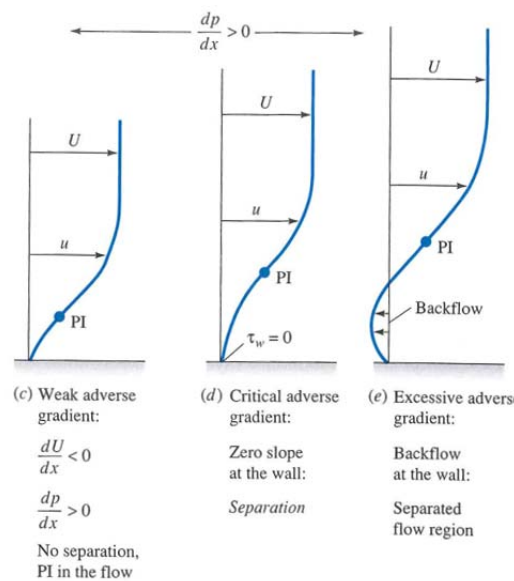


Figure 97 Effet d'un gradient positif de pression sur le profil de vitesse

Cet effet est très marqué dans le cas pratique d'un convergent-divergent. Négligeant temporairement les pertes, la conservation de la masse et de l'énergie dans le cas d'un écoulement horizontal indique clairement que :

- dans la partie convergente, la vitesse s'accroît $\frac{\partial U}{\partial x} > 0$ et la pression diminue $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$
→ l'écoulement est stable
- dans la partie divergente, la vitesse diminue $\frac{\partial U}{\partial x} < 0$ et la pression s'accroît $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$
→ l'écoulement est instable

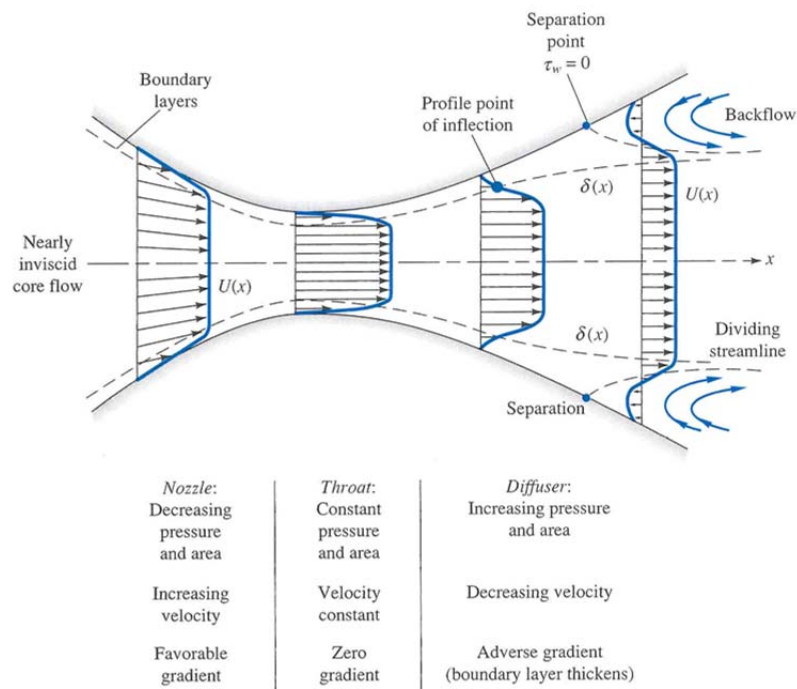


Figure 98 Effet d'un gradient positif de pression sur le profil de vitesse

La Figure 97 suggère l'importance de la forme du divergent sur la qualité des « conditions de sortie ».

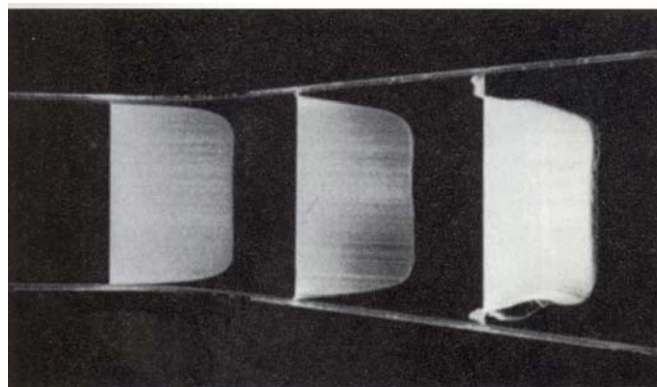


Figure 99 Ecoulement expérimental dans un divergent

3. Couche limite turbulente

L'évolution des propriétés de la couche limite laminaire et de ses effets induits sur une plaque lisse ont fait l'objet des points précédents.

Pour des nombre de Reynolds plus élevés, la turbulence dans l'écoulement va apparaître et modifier sensiblement ces propriétés. Etant donné qu'un écoulement turbulent est caractérisé, selon Reynolds, par un champ de vitesse avec une composante moyenne et une composante fluctuante aléatoire, des développements similaires à ceux menés précédemment ne sont possibles que sous certaines conditions, notamment sur la connaissance du champ de vitesse à l'intérieur de la couche limite. C'est principalement Prandtl qui a initialement travaillé sur ce sujet et dont les résultats principaux sont exposés ci-après.

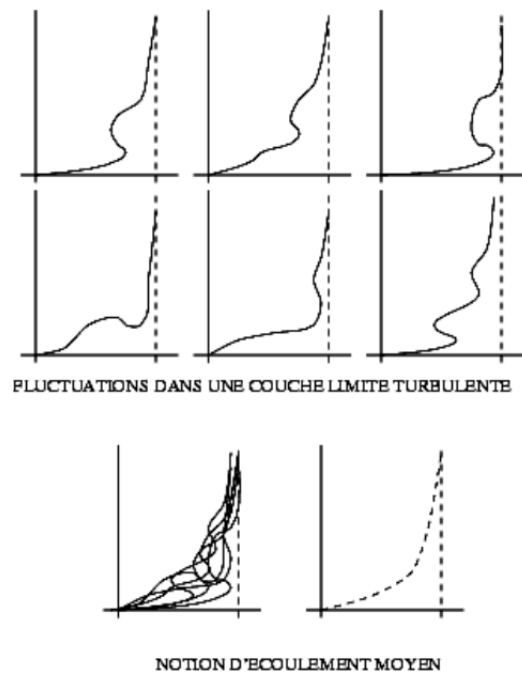


Figure 100 Notion de fluctuation et d'écoulement moyen dans une couche limite turbulente sur une plaque plane

3.1. Détermination du profil de vitesse

3.1.1. Position du problème

Le cas d'étude est identique à celui utilisé en écoulement laminaire à savoir une plaque plane lisse infiniment longue dans un écoulement stationnaire de vitesse uniforme au loin.

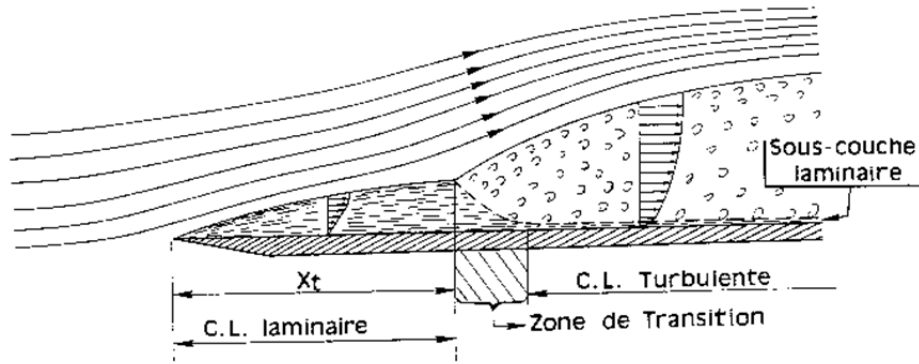


Figure 101 Evolution de la couche limite – passage de laminaire en turbulent

Il a été observé que la transition entre une couche limite laminaire et turbulente se produit pour un Re_L compris entre $5 \cdot 10^5$ et 10^6 . Toujours d'après les observations, une fois la transition effectuée, l'épaisseur de la couche limite croît beaucoup plus rapidement mais, dans cet écoulement majoritairement turbulent, persiste toujours une fine couche laminaire appelée couramment « sous-couche laminaire ».

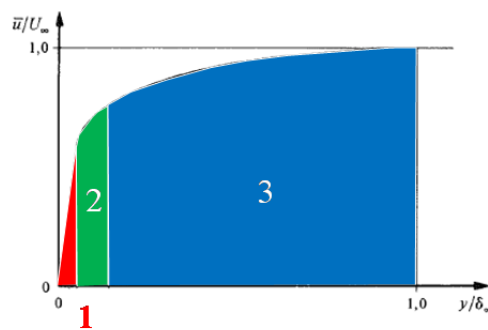


Figure 102 Décomposition du profil en 3 zones selon Prandtl

Prandtl a basé ses travaux sur une décomposition de la couche limite turbulente en trois zones distinctes. Cette décomposition est conforme aux observations expérimentales.

Le but de ses recherches était d'aboutir à une formulation du profil de vitesse pour chacune de ces zones et plus globalement à une expression générale en vue de la relier, tout comme en laminaire aux pertes générées dans l'écoulement ou aux tensions à la surface des corps.

En laminaire, les équations (7.37) régissent le mouvement dans la couche limite. L'application de la décomposition de Reynolds à ce système permet d'aboutir aux formulations correspondantes dans le cas d'un écoulement turbulent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \overline{\frac{\partial u'v'}{\partial y}} \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (7.65)$$

Cette décomposition ajoute évidemment un terme de tension turbulente $\overline{\rho u'v'}$ en plus de la tension visqueuse habituelle $\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$.

3.1.2. Analyse dimensionnelle

En vue de paramétrer les trois zones, il est une nouvelle fois utile d'effectuer une analyse adimensionnelle. Dans ce but, plusieurs grandeurs caractéristiques sont retenues :

- vitesse moyenne selon x : \bar{u}
- coordonnée d'évolution de la couche limite : y
- masse volumique du fluide : ρ
- viscosité du fluide : ν
- tension pariétale : τ_0

Le théorème II renseigne, à l'examen de la matrice dimensionnelle de rang 3, qu'il doit exister 2 produits adimensionnels liant les grandeurs de référence.

$$\begin{array}{ccccc} & \bar{u} & y & \tau_0 & \rho & \nu \\ \text{L} & 1 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ \text{M} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \text{T} & -1 & 0 & -2 & 0 & -1 \end{array} \quad (7.66)$$

Le premier nombre adimensionnel est obtenu en reliant \bar{u} , τ_0 , ρ et ν :

$$\pi_1 = \bar{u} \sqrt{\frac{\rho}{\tau_0}} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} \Leftrightarrow \pi_1 = \frac{\bar{u}}{u^*} \text{ noté } u^+ \quad (7.67)$$

En définissant la « vitesse de frottement » comme :

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (7.68)$$

Le second nombre adimensionnel, prenant la forme d'un nombre de Reynolds un peu particulier, est obtenu en reliant y , τ_0 , ρ et ν :

$$\pi_2 = \frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \frac{yu^*}{\nu} \text{ noté } y^+ \quad (7.69)$$

3.1.3. Zone 1 du profil de vitesse

Cette zone correspond à la sous-couche laminaire de la couche limite turbulente. Dans cette couche, par définition, les fluctuations turbulentes sont nulles. De plus, à proximité de la paroi :

$$\begin{cases} \bar{u} \rightarrow 0 \\ \bar{v} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (7.70)$$

En négligeant les gradients de pression, tout comme cela avait été le cas en laminaire, il vient :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial \bar{u} \bar{v}}{\partial y} \right] \Rightarrow 0 = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \quad (7.71)$$

La conservation de quantité de mouvement selon x se transforme ainsi en une équation aux dérivées totales, intégrable aisément :

$$\bar{u} = Cy, \text{ avec } C = \text{constante} \quad (7.72)$$

La tension à la paroi peut également être évaluée :

$$\tau_{paroi} \equiv \tau_0 = \left[\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right]_{y=0} = \mu C \Rightarrow C = \frac{\tau_0}{\mu} \quad (7.73)$$

Cela permet ainsi de relier la constante d'intégration à la tension pariétale.

L'utilisation des relations (7.72), (7.73) dans (7.67) et (7.69) permet d'aboutir directement au résultat remarquable :

$$\begin{aligned} \pi_1 = \frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{Cy}{u^*} = \frac{\tau_0 y}{\mu u^*} = \frac{y u^*}{\nu} = \pi_2 \\ u^+ = y^+ \end{aligned} \quad (7.74)$$

Ou encore :

$$u^+ \left(\bar{u}, \tau_0, \rho \right) = y^+ \left(y, \tau_0, \rho, \mu \right) \quad (7.75)$$

Expérimentalement, il a été observé que cette correspondance était valable pour autant que $y^+ < 10$.

3.1.4. Zone 2 du profil de vitesse

Etant donné que cette zone est proche de la paroi, on suppose que :

$$u^+ \left(\underbrace{\bar{u}, \tau_0, \rho}_{\text{mesurables}} \right) = f \left(y^+ \left(\underbrace{y, \tau_0, \rho, \mu}_{\text{mesurables}} \right) \right) \quad (7.76)$$

La fonction f est cependant à déterminer.

Pour ce faire, Prandtl émet quatre hypothèses :

Hypothèse n°1

« Le transfert de quantité de mouvement est produit principalement par la turbulence »

D'après cette hypothèse, la conservation de quantité de mouvement selon x , (7.65), se réduit à :

$$0 = \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \quad (7.77)$$

Et donc, $\overline{u'v'}$ est une constante indépendante de y .

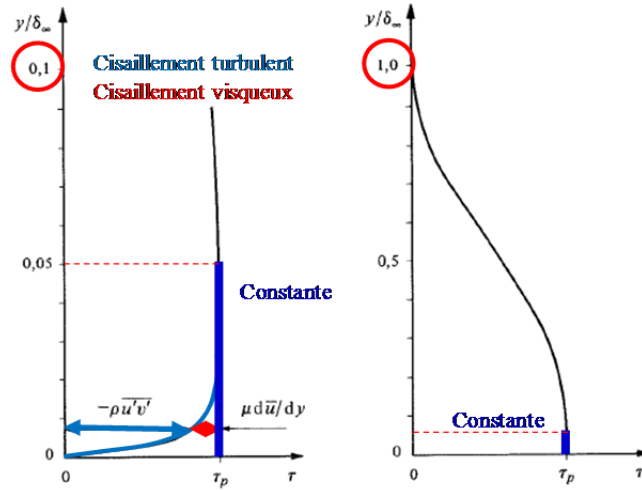


Figure 103 Evolution de la tension de cisaillement dans la couche limite

D'après les observations, la tension de cisaillement est en effet pratiquement constante pour

$$0 < \frac{y}{\delta_\infty} < 0.05.$$

Cependant, au voisinage proche de la paroi, les tensions visqueuses $\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ et turbulentes $-\rho \overline{u'v'}$ évoluent très rapidement mais de façon inversement proportionnelles.

Cette constance locale permet de caractériser les tensions turbulentes depuis la tension pariétale :

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \tau_0 = \text{Constante} \quad (7.78)$$

Ou encore :

$$\tau_0 = f(\overline{u'v'}) \quad (7.79)$$

Hypothèse n°2

« Une particule de fluide en mouvement perpendiculaire aux lignes de courant définies par u et v garde sa quantité de mouvement selon x sur une distance l caractéristique avant d'être assimilée par son environnement »

Si la perturbation v' est positive, cela signifie que la particule s'éloigne de la paroi et provoque une fluctuation u' plus loin. Ainsi, A l'ordonnée y , on voit non seulement les particules qui passent à la vitesse moyenne $\bar{u}(y)$ mais également celles qui viennent de l'ordonnée $(y-l)$ et qui ont donc des vitesses $\bar{u}(y-l)$ inférieures.

La perturbation selon x peut donc être approximée par :

$$u' = \bar{u}(y) - \bar{u}(y-l) = l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \dots \cong l \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (7.80)$$

où l définit la longueur de mélange de Prandtl

A contrario, si v' est négatif, il vient également :

$$u' = \bar{u}(y+l) - \bar{u}(y) = l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \dots \cong l \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (7.81)$$

Hypothèse n°3

« Les composantes fluctuantes doivent être du même ordre de grandeur »

Compte-tenu de la turbulence, il est réaliste d'accepter cette « isotropie » :

$$|v'| \simeq |u'| \simeq l \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (7.82)$$

La prise en compte de (7.82) dans (7.78) permet ainsi d'aboutir à l'expression :

$$\tau_t = -\rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 = \tau_0 = \text{Constante} \quad (7.83)$$

Et étant donné que :

$$\text{signe}(\tau_t) = -\text{signe}\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right) \quad (7.84)$$

La formulation finale s'exprime comme :

$$\tau_t = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (7.85)$$

L'analogie entre la formulation des tensions visqueuses $\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ et (7.85) conduit à la définition de la viscosité cinématique tourbillonnaire ou viscosité turbulente indépendante des propriétés du fluide, mais dépendante des conditions d'écoulement :

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (7.86)$$

Hypothèse n°4

« l est inconnu mais on peut s'attendre à ce que l soit une fonction croissante avec y »

Le déplacement maximum possible d'un « agglomérat fluide (tourbillon) » près de la paroi est effectivement limité par y , du moins dans la direction de y .

$$l = Ky \quad (7.87)$$

où $K = 0,40$ est la constante de Von Karman

Ainsi, (7.85) devient :

$$\tau_t = \tau_0 = \rho K^2 y^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (7.88)$$

Compte tenu des 4 hypothèses précédentes, il est possible de trouver une formulation représentative de la zone n°2 :

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{1}{Ky} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{d\bar{u}^+}{dy^+} = \frac{1}{Ky^+}} \quad (7.89)$$

$$u^+ = \frac{1}{K} \ln y^+ + \text{Constante} \quad (7.90)$$

Ou de façon plus générale en définissant deux constantes C_1 et C_2 :

$$u^+ = C_1 \log_{10} y^+ + C_2 \quad (7.91)$$

Cela signifie pratiquement que la tension à la paroi peut être évaluée à partir du champ de vitesse mesurable de la zone 2. La relation en logarithme est cependant implicite.

Par comparaison expérimentale, Prandtl a exprimé les deux constantes :

$$u^+ = 5.85 \log y^+ + 5.56 \quad \text{valable pour } 30 < y^+ < 500 \quad (7.92)$$

Selon le nombre de Re, $y^+ = 500$ représente de 5 à 15% de l'épaisseur de la couche limite. Ainsi, de 85 à 95 % de cette couche limite fait partie de la zone n°3 pour laquelle aucune expression n'est encore établie.

3.1.5. Zone 3 du profil de vitesse

Dans cette zone, le gradient de pression adverse influence sensiblement la distribution de vitesse. Etant donné qu'en s'éloignant de plus en plus de la paroi \bar{u} s'approche nécessairement de U_0 , Prandtl introduit la notion de « vitesse déficitaire ».

$$\frac{U_0 - \bar{u}}{u^*} = g\left(\frac{y}{\delta_\infty}; \frac{dp}{dx}\right) \quad (7.93)$$

Cette grandeur adimensionnelle peut être tracée pour une couche limite à « l'équilibre » en fonction de β qui traduit l'équilibre entre dp/dx et τ_0 .

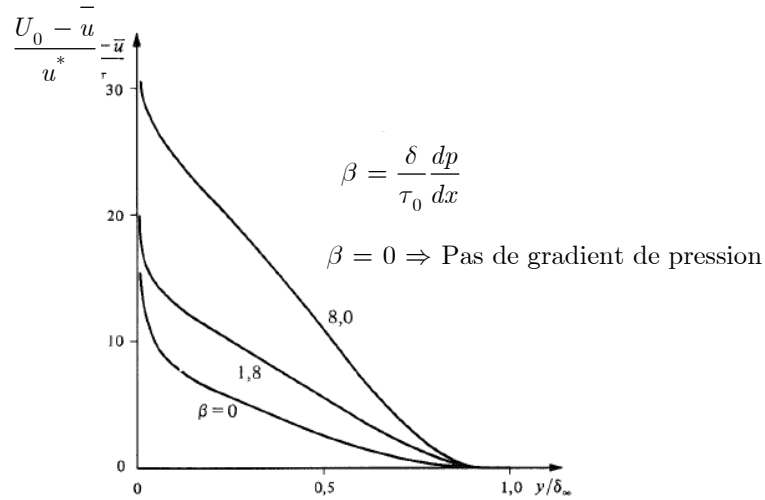


Figure 104 Evolution de la vitesse déficitaire dans la zone 3 pour différentes valeurs de β

3.1.6. Profil universel de vitesse

Formulation implicite de Prandtl

Compte-tenu des développements précédents, il est possible de tracer le profil de vitesse universel selon Prandtl dans une couche limite turbulente.

Pour rappel : $u^+ = \frac{\bar{u}}{u^*}$ et $y^+ = \frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \frac{yu^*}{\nu}$

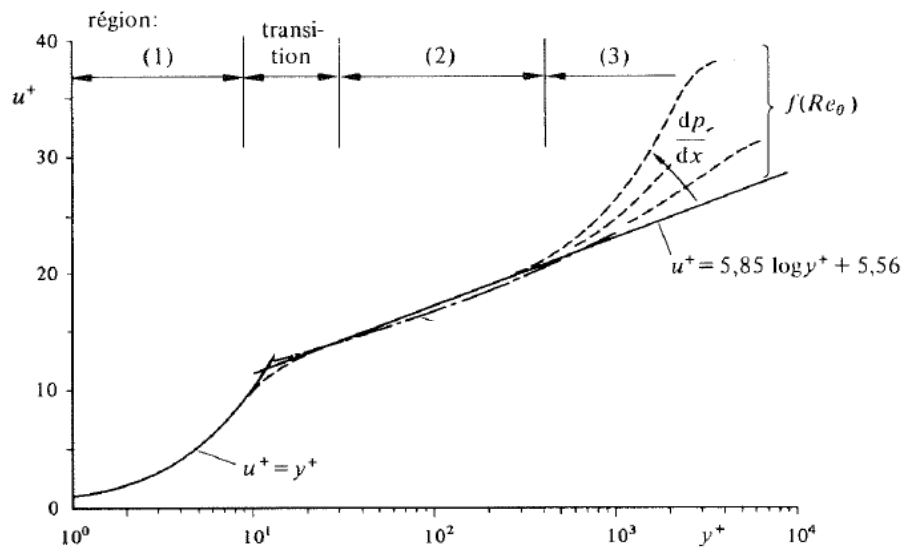


Figure 105 Profil universel de vitesse selon Prandtl

Formulation explicite de Blasius

L'inconvénient majeur de cette formulation est la présence d'une relation implicite dans la zone n°2. Pour contourner cette difficulté, Blasius a proposé d'utiliser une formulation approchée mais explicite, valable pour un Reynolds compris entre $4 \cdot 10^3$ et 10^5 :

$$u^+ = 8,74 y^{+\frac{1}{7}} \quad (7.94)$$

Cette dernière formule sera notamment d'un grand avantage pratique dans la suite des développements.

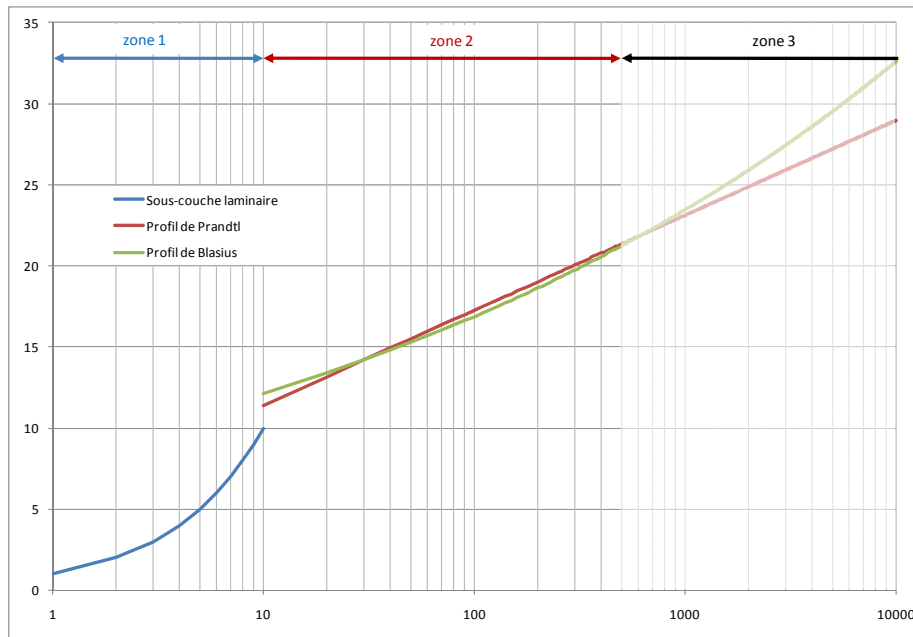


Figure 106 Profil universel de vitesse selon Prandtl et Blasius

Approximation usuelle

En généralisant la formulation de Blasius, il est possible de définir :

$$u^+ = 8,74 y^{+\frac{1}{n}} \quad (7.95)$$

En vue d'une utilisation pratique, la formulation adimensionnelle (7.95) doit être « dimensionnalisée ». La mise sous forme auto-similaire serait également une excellente chose. Il vient ainsi, par utilisation de (7.67) et (7.69) :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}}{u_*} &= 8,74 \left(\frac{u_* y}{\nu} \right)^{\frac{1}{n}} \\ \frac{\bar{u}}{U_0} &= \frac{8,74}{U_0} \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \left(\frac{\delta}{\nu} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}} \end{aligned} \quad (7.96)$$

La condition de compatibilité avec l'écoulement extérieur fournit :

$$\left. \frac{\bar{u}}{U_0} \right|_{y=\delta} = 1 \Rightarrow \frac{8,74}{U_0} \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \left(\frac{\delta}{\nu} \right)^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (7.97)$$

L'utilisation de (7.97) dans (7.96) permet donc de définir l'approximation usuelle de la vitesse en régime turbulent :

$$\frac{\bar{u}}{U_0} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{avec } n \cong 7 - 8 \text{ pour une plaque plane} \quad (7.98)$$

L'équation (7.97) constitue également une relation à part entière puisqu'il s'agit d'une loi de frottement qui peut s'exprimer plus adéquatement comme :

$$\tau_0 = \rho \left(\frac{U_0}{8,74} \right)^{\frac{2n}{n+1}} \left(\frac{\nu}{\delta} \right)^{\frac{2}{n+1}} = \rho U_0^2 \left(\frac{1}{8,74} \right)^{\frac{2n}{n+1}} \left(\frac{\nu}{U_0 \delta} \right)^{\frac{2}{n+1}} \quad (7.99)$$

3.2. Evolution spatiale de la couche limite

Evolution de l'épaisseur

Si l'on souhaite appliquer l'approche macroscopique similaire à celle employée pour la couche limite laminaire (2.2.2), il faut disposer d'une formulation de la vitesse sous la forme d'un profil auto-similaire.

Comme cela a déjà été mentionné précédemment, le profil de vitesse universel de Prandtl n'est pas explicite. Il ne peut donc pas convenir.

Par contre, la forme usuelle (7.98) a directement la bonne expression. En exploitant cette relation, la tension pariétale peut s'exprimer comme :

$$\tau_0 = \rho U_0^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \int_0^1 \eta^{\frac{1}{n}} \left(1 - \eta^{\frac{1}{n}} \right) dy = \rho U_0^2 \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{n} + 1 \right)} - \frac{1}{\left(\frac{2}{n} + 1 \right)} \right) \frac{\partial \delta}{\partial x} \quad (7.100)$$

L'élimination de τ_0 entre (7.100) et (7.99) donne :

$$\left(\frac{1}{8,74} \right)^{\frac{2n}{n+1}} \left(\frac{\nu}{U_0 \delta} \right)^{\frac{2}{n+1}} = \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{n} + 1 \right)} - \frac{1}{\left(\frac{2}{n} + 1 \right)} \right) \frac{\partial \delta}{\partial x} \quad (7.101)$$

Pour pouvoir procéder à l'intégration, il est plus aisé de choisir la valeur du paramètre n à 7 étant donné que l'on est dans le cas de la plaque plane lisse. (7.101) devient :

$$0,231 \left(\frac{\nu}{U_o \delta} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{\partial \frac{\delta U_o}{\nu}}{\partial \frac{x U_o}{\nu}} \quad (7.102)$$

$$\frac{4}{5} \left(\frac{\delta U_o}{\nu} \right)^{\frac{5}{4}} = 0,231 \frac{x U_o}{\nu} + C \quad (7.103)$$

Et la constante d'intégration peut être déterminée par l'intermédiaire des conditions aux limites en $x=0$:

$$\delta = 0,370 \left(\frac{\nu}{U_o} \right)^{\frac{1}{5}} x^{\frac{4}{5}} \quad (7.104)$$

De façon similaire à la couche laminaire, il est possible d'en tirer une expression en fonction d'un Re_x :

$$\delta = 0,370 \left(\frac{\nu}{U_o} \right)^{\frac{1}{5}} x^{\frac{4}{5}} = 0,370 \left(\frac{\nu}{U_o x} \right)^{\frac{1}{5}} x = \frac{0,370}{Re_x^{\frac{1}{5}}} x \quad (7.105)$$

Une observation similaire au cas laminaire peut être tirée, à savoir qu'à abscisse fixée, l'épaisseur de la couche limite turbulente va décroître si le Reynolds de l'écoulement augmente.

Analyse de l'effet de traînée sur la plaque

L'évaluation de la traînée de frottement sur une demi-plaque de longueur L et de largeur unitaire peut maintenant être calculée grâce à (7.104) et **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**, pour $n=7$:

$$F_{\text{traînée}} = \int_0^L \tau_0 dx = C_f L \frac{\rho U_o^2}{2} \quad (7.106)$$

$$F_{\text{traînée}} = 0,0721 Re_L^{-\frac{1}{5}} L \frac{\rho U_o^2}{2} \Rightarrow C_f = \frac{0,0721}{Re_L^{\frac{1}{5}}} \quad (7.107)$$

4. Comparaison de la couche limite laminaire et turbulente

Tout d'abord, il est utile de rappeler que, dans le cas étudié, le nombre de Reynolds qualifiant la transition entre un écoulement laminaire et un écoulement turbulent a été défini avec une longueur caractéristique correspondant à l'abscisse depuis le bord d'attaque de la plaque :

$$Re_x = \frac{U_o x}{\nu} \quad (7.108)$$

4.1. Au sens du profil de vitesse

A vitesse et viscosité constantes, il y aura donc toujours théoriquement une transition possible.

Au niveau du profil de vitesse, la différence entre la couche limite laminaire et turbulente est représentée à la figure suivante.

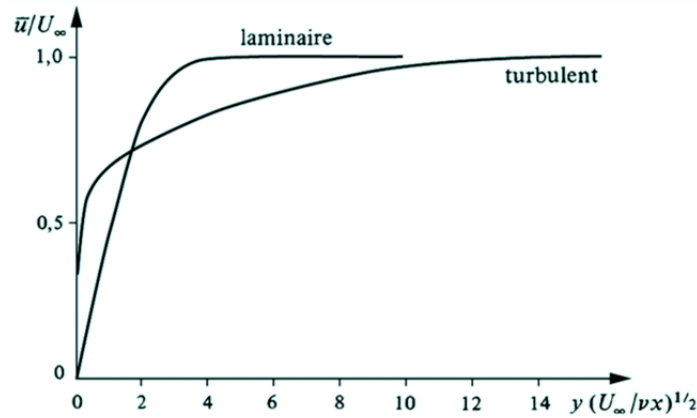


Figure 107 Comparaison du profil de vitesse en laminaire et en turbulent

Dû au brassage turbulent, la vitesse évolue beaucoup plus rapidement. Cependant, la vitesse uniforme est tout de même atteinte sensiblement plus vite dans le cas laminaire.

4.2. Au sens de l'épaisseur

Au niveau de l'évolution de l'épaisseur de la couche limite δ :

$$\text{en laminaire : } \delta = \frac{5,5x}{\text{Re}_x^{\frac{1}{2}}} \quad (7.109)$$

$$\text{en turbulent : } \delta = \frac{0,370x}{\text{Re}_x^{\frac{1}{5}}} \quad (7.110)$$

Il est évident que la couche limite turbulente évolue beaucoup plus rapidement que la couche laminaire comme l'illustre en introduction la Figure 101.

4.3. Au sens de la traînée induite

Au niveau du coefficient de frottement pariétal, la Figure 108 synthétise les relations (7.57) et (7.107). En turbulent, l'effort frottant appliqué sur le corps sera ainsi sensiblement plus important qu'en laminaire.

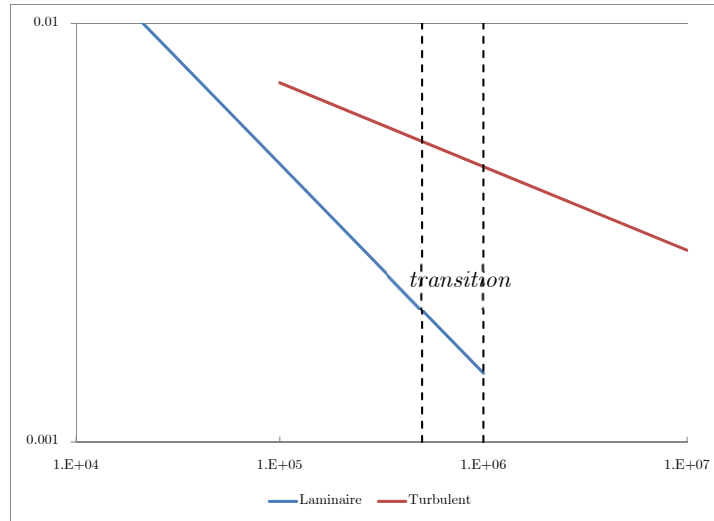


Figure 108 Evolution du coefficient de frottement pariétal

Lors de l'étude d'un corps dans un fluide, cette évolution de l'effort de frottement n'est cependant pas la seule à considérer. En effet, il subit également une traînée de pression, due au différentiel de pression dans le sens de l'écoulement. Cette dernière force était pour rappel nulle dans le cadre d'un écoulement irrotationnel (cf paradoxe de d'Alembert).

Il a été illustré dans le cadre de l'étude de la couche limite laminaire qu'un gradient de pression adverse peut amener la couche limite à « décoller » de la paroi solide. Dans ce cas, la traînée de pression est sensiblement augmentée.

Il peut être démontré mathématiquement que la couche limite laminaire décolle plus rapidement que la couche limite turbulente. Physiquement, ce retard dans le décollement est dû au brassage turbulent qui permet de conserver de l'énergie plus longtemps au voisinage de la paroi.

Dans le cas pratique d'une sphère placée dans un écoulement uniforme, la couche limite laminaire va se décoller pour un angle compris entre 95° et 105° .

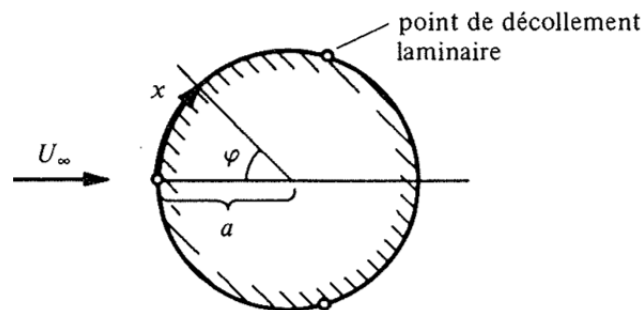


Figure 109 Position des points de décollement de la couche limite laminaire pour une sphère dans un écoulement uniforme

A très bas nombre de Re , la traînée par frottement sur cette sphère est dominante (cf 6). Par contre, en évoluant vers des nombres de Re plus élevés, mais pas nécessairement turbulent, c'est la traînée de pression (induite principalement par le décollement de la couche limite) qui devient rapidement dominante.

Ainsi, le passage de la couche limite en turbulent va permettre, par le décollement retardé, de sensiblement diminuer cette traînée de pression. Globalement, la traînée sur la sphère deviendra plus faible en turbulent qu'en laminaire malgré l'accroissement prévu théoriquement de la traînée de frottement.

Le gain vient donc d'une modification différenciée entre les deux composantes de traînée, l'effet majoritaire évoluant plus rapidement à la baisse.

En pratique, il est observé qu'une très légère perturbation permet de favoriser ce passage en turbulent. C'est par exemple le cas sur la Figure 132 où un anneau a été placé sur la section d'attaque de la sphère.

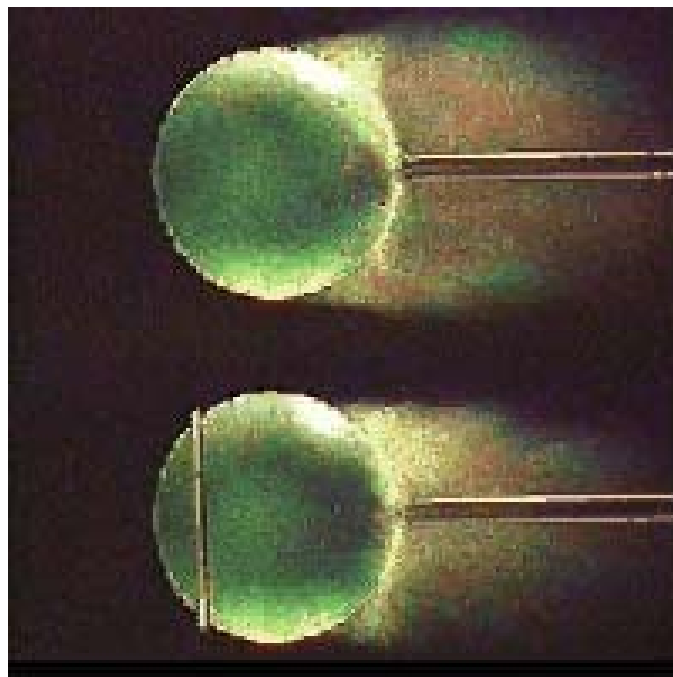


Figure 110 Différence de décollement entre la couche limite laminaire et turbulente

A titre d'illustration, cette observation théorique est exploitée dans de multiples sports de balle où la forme ou la texture du revêtement sont adaptées pour permettre une meilleure pénétration dans l'air par un passage rapide en écoulement turbulent.

Il en est de même en aéronautique ou en construction automobile où des « ergots » placés sur le fuselage, la carrosserie ou les rétroviseurs ont pour unique objectif d'effectuer cette transition d'écoulement.



Figure 111 Applications pratiques des différences de comportement entre couche limite laminaire et turbulente

5. Notion de régime non établi et établi

La notion de couche limite a été introduite par l'exemple d'une paroi lisse dans un domaine de dimensions infinies. Si maintenant l'extension spatiale du domaine est finie, au moins selon une dimension, il est possible de définir la notion de régime établi ou non.

En effet, supposons un écoulement entre deux plaques imperméables avec comme condition limite amont un écoulement uniforme. La condition de non glissement aux parois va engendrer le développement de couches limites de part et d'autre. A une certaine distance du bord d'attaque, les deux couches limites vont se rencontrer et, à ce moment, l'entièreté de l'espace entre les plaques sera occupée par cet écoulement particulier qui ne pourra plus évoluer par respect de la symétrie.

Ce point de rencontre des couches limites définit la transition entre le régime non établi, dont les propriétés évoluent selon la direction de l'écoulement, et le régime établi, de reproduction moyenne stationnaire.

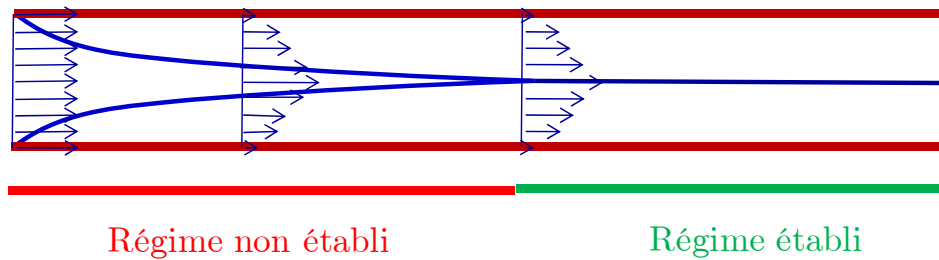


Figure 112: Les couches limites délimitent deux zones d'écoulement

Le profil de vitesse dans le régime non établi est mixte, au sens que la vitesse est uniforme dans la zone centrale, puis diminue progressivement jusqu'à une vitesse nulle sur la paroi.

Les écoulements en conduite sont sans doute la situation la plus fréquente pour l'ingénieur. De façon générale, une conduite sera définie comme une section fermée dans laquelle les couches limites générées depuis chaque portion de la paroi vont finir par interagir entre-elles pour modifier sensiblement le comportement de l'écoulement.

Un cas pratique d'une grande importance est notamment l'écoulement laminaire dans une conduite circulaire. Etant donné son importance pour l'ingénieur, il conviendra d'étudier cette situation avec précision. Fort heureusement, le praticien accorde peu d'importance à la distribution exacte du profil de vitesse mais souhaite pouvoir caractériser son installation de manière globale, par le biais du concept global de perte de charge. Ce principe général sera néanmoins énoncé de façon rigoureuse par l'intermédiaire d'une analyse dimensionnelle.

6. Ecoulement de Stokes

6.1. Introduction

Avant d'étudier des écoulements dans un domaine restreint, il est intéressant d'analyser certaines solutions analytiques dans des conditions d'écoulements particulières.

C'est le cas des écoulements de Stokes ($Re \ll 1$) pour lesquelles une simplification du système général existe. Dans ce type d'écoulement, les termes visqueux sont dominants vis-à-vis des termes convectifs.

Dans un but de simplification, les développements seront effectués sous les hypothèses d'écoulement stationnaire en l'absence de force extérieure. De cette façon, le système général de Navier-Stokes devient :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \\ \nabla p = \mu \Delta \vec{U} \end{cases} \quad (7.111)$$

6.2. Sphère dans un écoulement homogène

6.2.1. Position du problème

Cet écoulement particulier va être étudié en détail dans le cas d'une sphère positionnée dans un fluide incompressible doté d'un mouvement uniforme au loin.

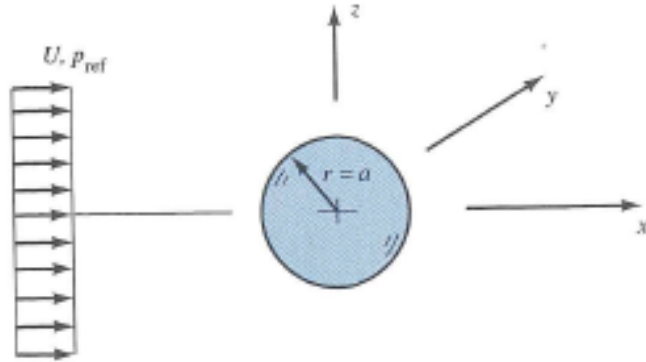


Figure 113 Cas d'étude de l'écoulement de Stokes autour d'une sphère

Pour cet écoulement, aucun décollement de la couche limite n'est observé. Les lignes de courant suivent donc parfaitement la forme de la sphère.

Le problème est axisymétrique selon x , il est donc pertinent d'employer les coordonnées sphériques (r, θ, φ) .

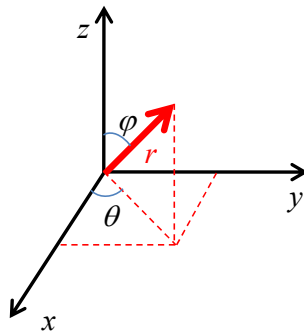


Figure 114 Définition des coordonnées sphériques

Vu la symétrie, le problème se résout dans un plan passant par x et d'inclinaison quelconque :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \vec{U} = \begin{pmatrix} v_r(r, \theta) \\ v_\theta(r, \theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.112)$$

6.2.2. Modèle mathématique

En sphérique axisymétrique, la continuité prend la forme développée :

$$\nabla \cdot \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) = 0 \quad (7.113)$$

Dans cette symétrie, il existe de plus une fonction de courant Ψ (vérifiant donc identiquement la continuité) telle que :

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ v_\theta &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{aligned} \quad (7.114)$$

Le vecteur potentiel et la « fonction de courant de Stokes » sont définis comme :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\Psi}{r \sin \theta} \end{pmatrix} \quad (7.115)$$

$$\vec{U} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \left(\frac{\Psi \vec{e}_\varphi}{r \sin \theta} \right) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & \Psi \end{vmatrix} = \vec{e}_r \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) - \vec{e}_\theta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \quad (7.116)$$

L'identité vectorielle :

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{U}) = \nabla \times \vec{\Omega} = \nabla \cdot \underbrace{(\nabla \cdot \vec{U})}_{=0 \text{ par continuité}} - \Delta \vec{U} \quad (7.117)$$

peut simplifier l'équation de quantité de mouvement multipliée vectoriellement par l'opérateur nabla :

$$\begin{aligned} \underbrace{\nabla \times \nabla p}_{=0} &= \nabla \times (\mu \Delta \vec{U}) \\ \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{\Omega}) &= 0 \end{aligned} \quad (7.118)$$

L'utilisation de la fonction de courant amène à :

$$\nabla \times (\nabla \times [\nabla \times (\nabla \times \vec{A})]) = 0 \quad (7.119)$$

Ou encore :

$$\nabla \times (\nabla \times [\nabla \times (\nabla \times \vec{A})]) = \nabla \times (\nabla \times [-\Delta \vec{A}]) = -\nabla \cdot (\nabla \cdot (\Delta \vec{A})) + \Delta^2 \vec{A} \quad (7.120)$$

$$\text{Étant donné que } \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \cdot \underbrace{(\nabla \cdot \vec{A})}_{=0 \text{ car } \vec{A} \text{ solénoïdal}} - \Delta \vec{A}$$

En sphérique axisymétrique :

$$\nabla \times \left[\nabla \times \frac{\vec{\Psi} e_\varphi}{r \sin \theta} \right] = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} & \frac{-1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\vec{e}_\theta}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right] \quad (7.121)$$

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \nabla \times \left(\frac{\vec{\Psi} e_\varphi}{r \sin \theta} \right) \\ \vec{\Omega} &= \nabla \times \vec{U} \end{aligned} \quad (7.122)$$

L'équation de quantité de mouvement devient donc une équation scalaire en Ψ :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \Psi = \Delta^2 \Psi = 0 \quad (7.123)$$

Ce système linéaire est biharmonique. Le principe de superposition est donc applicable.

6.2.3. Résolution analytique

Les conditions limites du problème à l'infini sont :

$$\vec{U}(x, y, z) = \begin{pmatrix} U_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ uo } \begin{aligned} v_r|_{r=\infty} &= U_0 \cos \theta = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ v_\theta|_{r=\infty} &= -U_0 \sin \theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{aligned} \quad (7.124)$$

$$\Rightarrow \Psi|_{r=\infty} = \frac{U_0}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad (7.125)$$

Les conditions d'imperméabilité sur le périmètre de la sphère s'expriment par :

$$\begin{aligned} v_r|_{r=a} &= 0 = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ v_\theta|_{r=a} &= 0 = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{aligned} \quad (7.126)$$

Etant donné l'allure de la fonction à l'infini, il est opportun de tester une solution du type :

$$\Psi = f(r) \sin^2 \theta$$

Etant donné que :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \Psi = \Delta^2 \Psi = 0 \quad (7.127)$$

La fonction f doit vérifier :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right]^2 f = r^4 f''' - 4r^2 f'' + 8rf' - 8f = 0 \quad (7.128)$$

qui n'est rien d'autre qu'une forme d'équation équidimensionnelle d'Euler-Cauchy dont la solution est du type

Si f est de la forme r^m :

$$\begin{aligned} r^4 f''' - 4r^2 f'' + 8rf' - 8f &= r^m [m(m-1)(m-2)(m-3) - 4m(m-1) + 8m - 8] = 0 \\ \Rightarrow m^4 - 6m^3 + 7m^2 + 6m - 8 &= 0 \\ \Rightarrow 4 \text{ racines réelles } m &= -1, 1, 2, 4 \end{aligned} \quad (7.129)$$

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4 \\ \Rightarrow \Psi &= \sin^2 \theta \left[\frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4 \right] \end{aligned} \quad (7.130)$$

Les conditions aux limites permettent de déterminer les constantes

A l'infini : $\Psi|_{r=\infty} = \frac{U_0}{2} r^2 \sin^2 \theta \Rightarrow D = 0, C = \frac{U_0}{2}$

En $r=a$:

$$\left. \begin{aligned} v_r|_{r=a} &= 0 = \frac{U_0}{2} + \frac{A}{a^3} + \frac{B}{a} \\ v_\theta|_{r=a} &= 0 = U_0 - \frac{A}{a^3} + \frac{B}{a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{4} U_0 a^3, B = -\frac{3}{4} U_0 a$$

6.2.4. Solution finale

La solution finale s'exprime donc comme :

$$\Psi = \frac{U_0}{2} \left[r^2 + \frac{a^3}{2r} - \frac{3ar}{2} \right] \sin^2 \theta \quad (7.131)$$

Qui n'est rien d'autre que la superposition des solutions d'un champ uniforme, d'un dipôle et d'une correction rotationnelle.

Le champ de vitesse se déduit immédiatement :

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = U_0 \left[1 + \frac{a^3}{2r^3} - \frac{3a}{2r} \right] \cos \theta \\ v_\theta &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -U_0 \left[1 - \frac{a^3}{4r^3} - \frac{3a}{4r} \right] \sin \theta \end{aligned} \quad (7.132)$$

La pression :

$$p = p_{ref} - \frac{3}{2} \frac{\mu U_0 a}{r^3} \cos \theta \quad (7.133)$$

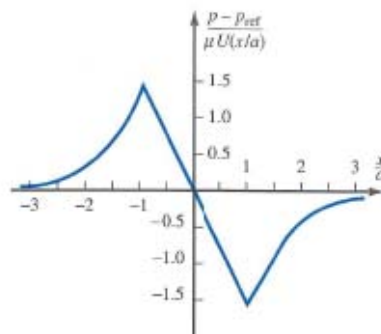


Figure 115 Variation de pression le long de l'axe

Les taux de déformation et les contraintes visqueuses :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{r\theta} &= r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = -\frac{3}{2} \frac{U_0 a^3}{r^4} \sin \theta \\ \tau_{r\theta} \big|_{r=a} &= \mu \varepsilon_{r\theta} = -\frac{3}{2} \frac{\mu U_0}{a} \sin \theta\end{aligned}\quad (7.134)$$

Etant donné que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, la solution analytique en coordonnées cartésiennes devient :

$$\begin{aligned}u &= U_0 \left[\frac{3}{4} \frac{ax^2}{r^3} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) - \frac{1}{4} \frac{a}{r} \left(3 + \frac{a^2}{r^2} \right) + 1 \right] \\ v &= U_0 \left[\frac{3}{4} \frac{axy}{r^3} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \right] \\ w &= U_0 \left[\frac{3}{4} \frac{axz}{r^3} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \right] \\ p &= p_{ref} - \frac{3}{2} \mu U_0 \frac{ax}{r^3}\end{aligned}\quad (7.135)$$

6.2.5. Analyse de la solution

Cette solution analytique permet ainsi d'évaluer correctement la traînée de forme, ou de pression, qui est égale à l'intégrale des forces de pression sur la sphère et la traînée de frottement qui est égale à l'intégrale des tensions de frottement.

$$F_{forme} = \int_A \left(p_{ref} - \frac{3}{2} \mu U_0 \frac{x}{a^2} \right) dA = 2\pi \int_0^\pi \left(p_{ref} - \frac{3}{2} \mu U_0 \frac{\cos \theta}{a} \right) \underbrace{\cos \theta \frac{a^2 \sin \theta}{\text{Jacobien}}}_{dA} d\theta \quad (7.136)$$

$$F_{forme} = 2a\pi\mu U_0 = D\pi\mu U_0$$

$$F_{frot} = \int_A \tau dA = 2\mu\pi D U_0 \quad (7.137)$$

Il est également possible de démontrer que la force de portance est bien nulle comme pouvait le laisser penser la symétrie de l'écoulement par rapport au plan xy .

La force de traînée totale constituée de la somme des deux traînées partielles de pression et de frottement vaut :

$$F_{traînée} = \mu\pi D U_0 + 2\mu\pi D U_0 = 3\mu\pi D U_0 \quad (7.138)$$

Et il est remarquable de constater que, pour ce cas précis, la traînée de frottement correspond tout juste au double de la traînée de pression.

Si A est le maître couple de la sphère, il est possible de trouver la valeur du coefficient de traînée :

$$\begin{aligned}F_{traînée} &= 3\mu\pi D U_0 = C_D A \rho \frac{U_0^2}{2} \\ C_D &= \frac{24}{\text{Re}} \quad \text{Re} = \frac{U_0 D}{\nu}\end{aligned}\quad (7.139)$$

En toute généralité, la traînée totale d'un corps est dépendante de la forme et du Re de l'écoulement. En outre, il avait été évoqué précédemment que dans une majorité de cas pratique, c'est bien la traînée de forme qui est dominante.

6.3. Paradoxe de Stokes

Cet écoulement de Stokes est si particulier qu'un paradoxe existe : « *Les conditions physiques permettant la simplification des équations de Navier-Stokes ne sont pas nécessairement rencontrées sur l'ensemble du domaine de solution. C'est par exemple le cas à l'infini où les termes inertiels prennent souvent le pas sur les termes visqueux.* ». Ce paradoxe empêche par exemple de trouver une solution analytique dans le cas d'un cylindre dans un champ uniforme.

6.4. Utilité pratique

6.4.1. Viscosimètre

La solution analytique de l'écoulement de Stokes autour d'une sphère est d'un très grand intérêt pratique. En effet, cela a conduit à l'élaboration d'appareils de mesure capable d'évaluer précisément la viscosité d'un fluide inconnu. Il s'agit des viscosimètres à chute.

Ces appareils mesurent la viscosité relative par chronométrage du temps de chute d'une bille dans un tube calibré rempli d'échantillon. Ce type d'appareil peut bien entendu être utilisé pour les échantillons dont l'opacité n'empêche pas d'observer la descente de la bille.



Figure 116 Illustrations de deux type de viscosimètre à chute

6.4.2. Nanotechnologies

D'un autre côté, la solution d'un écoulement de Stokes étant le résultat d'un système d'équations linéaires, cela signifie que le principe de superposition est d'application.

Dès lors, si un nageur effectue des mouvements répétitifs dans de telles conditions, étant donné que les mouvements sont périodiques, les efforts appliqués s'annulent en moyenne et le nageur n'avance pas. Une solution dans ce cas est de procéder par des mouvements rotatifs. C'est le cas notamment des spermatozoïdes.

Cette technique de nage est utilisée en médecine par l'intermédiaire des nanotechnologies. Des chercheurs ont en effet imité la nature en créant un nageur nanoscopique qui ressemble étrangement à un spermatozoïde. L'objectif étant de nager dans le corps humain pour la microchirurgie ou le traitement à la source du mal.

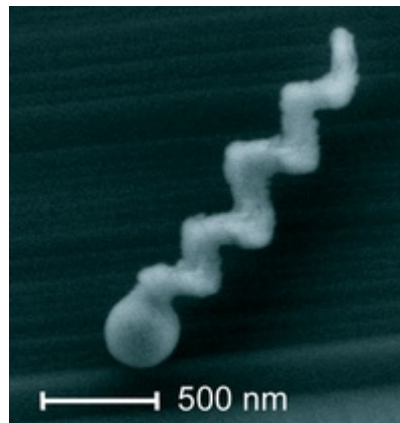


Figure 117 « Nageur » nanoscopique

« S'inspirant des flagelles des bactéries, qui leurs permettent de nager à contre courant, Ambarish Gosh et Peer Fischer de l'Université d'Harvard ont conçu une nano-hélice de verre et de cobalt d'une longueur total d'un micromètre (1 millionième de mètre). Leurs travaux sont présentés dans un article de la revue Nanoletters ainsi que sur le site de New Scientists.

L'application d'un champ magnétique agissant sur le cobalt permet de mettre en mouvement les hélices du nano-nageur. Les scientifiques affirment que le nano-robot pourrait déplacer des objets faisant 1000 fois sa taille. Les applications médicales sont multiples comme par exemple la livraison de médicament à travers la circulation sanguine directement à la source du mal. »

7. Solutions analytiques d'écoulements laminaires plans

7.1. Formulation générale

7.1.1. Position du problème

Après avoir étudié l'écoulement particulier de Stokes en 3D, il est possible de faire évoluer le domaine en confinant l'espace selon oy . De cette manière, l'écoulement considéré est situé entre deux plaques distantes de h .

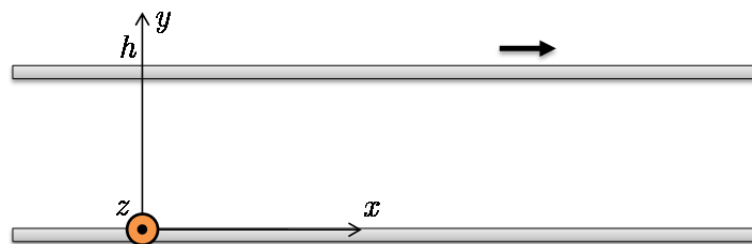


Figure 118 Domaine d'étude

Après avoir simplifié le système d'équations de Navier-Stokes en fonction des caractéristiques de l'écoulement, il sera possible d'intégrer analytiquement le champ de vitesse pour en déduire la formulation des tensions visqueuses internes, de la tension pariétale et des pertes de charge le long d'une ligne de courant.

Le fluide sera considéré comme étant incompressible et newtonien. L'écoulement étudié est l'écoulement laminaire établi unidirectionnel limité par deux plaques planes parallèles, l'une étant fixe et l'autre éventuellement mobile, en l'absence de force extérieure.

Cette configuration permet de mettre en évidence deux écoulements typiques référencés dans la littérature comme :

- L'écoulement de Couette : la paroi inférieure est au repos, la paroi supérieure est animée d'une vitesse de translation uniforme U_s (pas de gradient de pression) ;
- L'écoulement de Poiseuille : les deux parois sont fixes, le moteur de l'écoulement étant un gradient longitudinal de pression.

7.1.2. Modèle mathématique

En considérant un écoulement orienté selon l'axe x , par symétrie, les composantes de vitesse selon y et z doivent être nulles. Le système général de Navier-Stokes se simplifie donc de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial p}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}} = 0 \\ \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + \cancel{\frac{\partial u^2}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial uv}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial uw}{\partial z}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} \right) \\ \text{par continuité} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial uv}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial v^2}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial vw}{\partial z}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial uw}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial vw}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial w^2}{\partial z}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}} \right) \end{array} \right. \quad (7.140)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (7.141)$$

7.1.3. Solution analytique

Chaque membre de l'équation de quantité de mouvement selon x étant dépendant de variables différentes, ils doivent donc être constants :

Par intégration, il vient :

$$u(y) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 \quad (7.142)$$

Les constantes d'intégration peuvent être déterminées à partir des conditions limites en $y=0$ et $y=h$:

$$u(y) = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y(h-y)}{2} + \frac{U_s}{h} y \quad (7.143)$$

7.1.4. Analyse des tensions visqueuses

Sur base de cette formulation de vitesse, l'écoulement étant laminaire, il est possible d'en déduire l'expression des tensions visqueuses dans le fluide et à la paroi (tension pariétale) :

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu \frac{du}{dy} \\ &= -\frac{dp}{dx} \frac{(h-2y)}{2} + \mu \frac{U_s}{h} \end{aligned} \quad (7.144)$$

$$\tau_{xy} \big|_{y=0} = \tau_0 = -\frac{dp}{dx} \frac{h}{2} + \mu \frac{U_s}{h} \quad (7.145)$$

$$\tau_{xy} \big|_{y=h} = \tau_h = \frac{dp}{dx} \frac{h}{2} + \mu \frac{U_s}{h} \quad (7.146)$$

7.1.5. Notion de vitesse moyenne

Une autre caractéristique importante est la vitesse moyenne du fluide. Vitesse moyenne liée à la notion de débit spécifique q (débit par unité de largeur) :

$$\begin{aligned}\frac{q}{h} &= \bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u(y) dy \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h \left[-\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y(h-y)}{2} + \frac{U_s}{h} y \right] dy \\ &= -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{12} + \frac{U_s}{2}\end{aligned}\tag{7.147}$$

7.2. Écoulement de Couette

En particulierisant les relations précédentes au cas spécifique de l'écoulement de Couette, il vient :

$$u(y) = \frac{U_s}{h} y \tag{7.148}$$

La vitesse est donc distribuée linéairement sur l'épaisseur de la lame fluide.

$$\bar{u} = \frac{U_s}{2} \tag{7.149}$$

Logiquement, la vitesse moyenne est la moitié de la vitesse motrice de la plaque supérieure.

$$\tau_0 = \tau_f = \mu \frac{U_s}{h} \tag{7.150}$$

$$\Delta \vec{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.151}$$

Les tensions pariétales au fond et au plafond sont identiques mais étant donné que le laplacien de la vitesse est nul, il n'existe pas de perte visqueuse au sein du fluide.

7.3. Écoulement de Poiseuille

En particulierisant les relations précédentes au cas spécifique de l'écoulement de Poiseuille, il vient :

$$u(y) = 6\bar{u}(h-y)\frac{y}{h^2} \tag{7.152}$$

La vitesse est donc distribuée de façon parabolique sur l'épaisseur de la lame fluide.

$$\bar{u} = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{12} \tag{7.153}$$

$$\tau_0 = -\tau_h = -\frac{dp}{dx} \frac{h}{2} = \frac{6\mu\bar{u}}{h} \quad (7.154)$$

En régime établi, la vitesse ne variant plus, la charge locale ne dépend plus que de la pression.

Le calcul de la perte de charge le long d'une ligne de courant amène donc à :

$$\Delta p = \int_L \frac{dp}{dx} dx = - \int_L \underbrace{\mu \frac{12}{h^2} \bar{u}}_{\neq f(x)} dx = -\mu \frac{12}{h^2} \bar{u} L = -24 \underbrace{\frac{\nu}{h\bar{u}}}_{\text{Re}} \frac{L}{h} \frac{\rho \bar{u}^2}{2} = -C_f \frac{L}{h} \frac{\rho \bar{u}^2}{2} \quad (7.155)$$

$$\Delta p = -\frac{24}{\text{Re}} \frac{L}{h} \frac{\rho \bar{u}^2}{2} \quad (7.156)$$

Le coefficient C_f est dans ce cas défini comme coefficient de frottement en long.

8. Écoulements en films minces

8.1. Formulation générale

8.1.1. Position du problème

Une autre famille d'écoulements particuliers est obtenue en supposant qu'une des dimensions est particulièrement faible vis-à-vis des deux autres :

$$\left. \begin{array}{l} x, y \sim L \\ z \sim h \end{array} \right\} \frac{h}{L} \ll 1 \quad (7.157)$$

Sous les hypothèses d'un fluide incompressible et d'un écoulement laminaire, stationnaire et sans force extérieure le système de Navier-Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i \end{array} \right. \quad (7.158)$$

peut subir des simplifications pertinentes.

8.1.2. Analyse dimensionnelle

Une mise sous forme adimensionnelle est obligatoire par l'intermédiaire du choix de grandeurs de référence. Etant donné l'hypothèse de film mince, le but de cette opération est de mettre en

évidence des termes multipliés par $\left(\frac{h}{L_c}\right)^2$ que l'on pourra considérer dans ce cas comme négligeables.

Tout comme dans le cas de la couche limite laminaire, il est licite de définir un temps de référence pendant lequel une particule parcourt une distance équivalente dans les différentes directions. Cela permet en effet de lier une grandeur de référence aux autres :

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{L_c}{U_0} = \frac{L_c}{u_0} = \frac{L_c}{v_0} = \frac{h}{w_0} \\ \Rightarrow u_0 &= v_0 = U_0 \\ \Rightarrow w_0 &= U_0 \frac{h}{L_c} \end{aligned} \quad (7.159)$$

Ainsi, l'équation de quantité de mouvement selon i :

$$u \frac{\partial u_i}{\partial x} + v \frac{\partial u_i}{\partial y} + w \frac{\partial u_i}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} \right) \quad (7.160)$$

devient successivement :

$$\begin{aligned} \frac{U_0 u_{i0}}{L_c} \left(u' \frac{\partial u_i'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u_i'}{\partial y'} \right) + \frac{u_{i0} w_0}{h} w' \frac{\partial u_i'}{\partial z'} &= -\frac{p_0}{\rho L_{ci}} \frac{\partial p'}{\partial x_i'} + \nu \left(\frac{u_{i0}}{L_c^2} \left(\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u_i'}{\partial y'^2} \right) + \frac{u_{i0}}{h^2} \frac{\partial^2 u_i'}{\partial z'^2} \right) \\ \frac{h^2 U_0}{L_c} \left(u' \frac{\partial u_i'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u_i'}{\partial y'} \right) + h w_0 w' \frac{\partial u_i'}{\partial z'} &= -\frac{p_0}{\rho u_{i0}} \frac{h^2}{L_{ci}} \frac{\partial p'}{\partial x_i'} + \nu \left(\left(\frac{h}{L_c} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u_i'}{\partial y'^2} \right) + \frac{\partial^2 u_i'}{\partial z'^2} \right) \end{aligned} \quad (7.161)$$

$$\text{avec } \text{Re}_L = \frac{L_c U_0}{\nu}$$

$$\left(\frac{h}{L_c} \right)^2 \text{Re}_L \left(u' \frac{\partial u_i'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u_i'}{\partial y'} + w' \frac{\partial u_i'}{\partial z'} \right) = -\frac{p_0}{\rho u_{i0} \nu} \frac{h^2}{L_{ci}} \frac{\partial p'}{\partial x_i'} + \left(\left(\frac{h}{L_c} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u_i'}{\partial y'^2} \right) + \frac{\partial^2 u_i'}{\partial z'^2} \right)$$

L'expression (7.161) contient les grandeurs de référence L_{ci} selon chaque axe. Selon z , (7.159) sera ainsi nécessaire pour simplifier adéquatement les termes.

Ainsi, selon x et y , il reste :

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{p_0}{\rho U_0 \nu} \frac{h^2}{L_c} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \\ 0 &= -\frac{p_0}{\rho U_0 \nu} \frac{h^2}{L_c} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} \end{aligned} \quad (7.162)$$

Tandis que selon z :

$$\begin{aligned} \left(\frac{h}{L_c} \right)^2 \text{Re}_L \left(u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{\partial w'}{\partial y'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) &= -\frac{p_0}{\rho w_0 \nu} h \frac{\partial p'}{\partial z'} + \left(\left(\frac{h}{L_c} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} \right) + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} \right) \\ \left(\frac{h}{L_c} \right)^4 \text{Re}_L \left(u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{\partial w'}{\partial y'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) &= -\frac{p_0}{\rho U_0 \nu} \frac{h^2}{L_c} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \left(\left(\frac{h}{L_c} \right)^4 \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} \right) + \left(\frac{h}{L_c} \right)^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} \right) \\ 0 &= -\frac{p_0}{\rho U_0 \nu} \frac{h^2}{L_c} \frac{\partial p'}{\partial z'} \end{aligned} \quad (7.163)$$

En supposant que : $\left(\frac{h}{L_c} \right)^4 \text{Re}_L \ll 1$

8.1.3. Modèle mathématique

Le système final s'écrit donc, sous la seule condition peu restrictive précédente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (7.164)$$

Cela signifie physiquement que, si h/L est suffisamment faible, les forces visqueuses sont dominantes et que l'influence des conditions de non glissement aux deux parois sera très importante.

Chaque membre des équations de quantité de mouvement selon x et y étant dépendant de variables différentes, il est possible d'écrire immédiatement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z^2 + Az + B \\ v = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} z^2 + Cz + D \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (7.165)$$

8.2. Applications pratiques

En pratique, ces écoulements en films minces sont utilisés notamment en mécanique via la problématique des paliers portants et plus généralement de la lubrification des corps.

Une autre application plus didactique est la cellule de Hele-Shaw caractérisée par des conditions limites $u, v=0$ en $z=0$ et $z=h$.

Ces conditions aux limites permettent de lever les constantes d'intégration de (7.165) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ u = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z(h-z) \\ v = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} z(h-z) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (7.166)$$

Ce qui implique que :

$$\frac{v}{u} = \frac{\frac{\partial p}{\partial y}}{\frac{\partial p}{\partial x}} \neq f(z) \quad (7.167)$$

Et donc que, par définition, les lignes de courant sont indépendantes de z .

De plus :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} z(h-z) \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} z(h-z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (7.168)$$

Et donc, l'écoulement plan selon xy dans une cellule de Hele-Shaw est irrotationnel malgré qu'il soit dominé par les effets visqueux.

La circulation γ est bien nulle puisque la pression est une fonction univoque de la pression :

$$\Gamma = \oint_C u dx + v dy = -\frac{1}{2\mu} z(h-z) \oint_C \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy = 0 \quad (7.169)$$

C'est ce type d'appareillage qui a notamment permis la réalisation de l'ensemble des animations expérimentales utiles à la compréhension des écoulements irrotationnels.

9. Ecoulements en conduite

9.1. Introduction

Après avoir étudié des écoulements plans, il est maintenant pertinent de confiner le domaine spatial en le contraignant à la fois selon y et z , de façon à s'intéresser aux écoulements en conduite.

Ainsi, une solution générale d'écoulement laminaire sous les conditions de Poiseuille sera établie de manière à caractériser le champ de vitesse mais également les tensions au sein du fluide et les pertes de charge associées.

Mais avant d'établir cette solution, il est utile de regarder comment se généralise l'équation de Bernoulli quand on procède à son intégration sur l'ensemble de la section mouillée. C'est en effet cette formulation qui est d'un grand intérêt pratique pour l'ingénieur.

9.2. Intégration de Bernoulli sur la section mouillée

Tous les principes de conservation ont été initialement établis sur un volume de contrôle avant d'en déduire des formes différentielles. Quoi donc de plus normal que d'essayer de retrouver une formulation intégrée, facilement utilisable en pratique pour l'équation de Bernoulli, principe déduit de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Pour rappel, l'équation de Bernoulli vue précédemment traduit la conservation de l'énergie le long d'une ligne de courant. Il faut donc généraliser cette relation en tenant compte des variables moyennées de l'écoulement dans le cas d'une section fermée supposée imperméable. La démonstration suivante montre que le théorème de Bernoulli macroscopique s'écrit :

$$\frac{d}{ds} \left(\alpha \bar{G} + \beta \frac{\bar{p}}{\rho} + \gamma \frac{\|\bar{\vec{U}}\|^2}{2} \right) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \vec{s} \cdot (\nu \Delta \bar{\vec{U}}) d\Omega \quad (7.170)$$

où \vec{s} est un vecteur tangent à l'axe de la conduite, les paramètres α, β, γ sont des coefficients d'inégale répartition sur la section transversale et le membre de droite représente l'ensemble des pertes de charge dans l'écoulement.

Pour établir la loi de Bernoulli macroscopique 1D, il faut repartir des équations décrivant un fluide incompressible dans un champ de force conservateur G :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{U} = 0 \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \left(G + \frac{p}{\rho} + \frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \right) = \vec{U} \times \vec{\Omega} + \nu \Delta \vec{U} \end{cases} \quad (7.171)$$

Par une multiplication scalaire de l'équation de quantité de mouvement par le vecteur de vitesse de l'écoulement \vec{U} , le système suivant est obtenu dans lequel apparaît de nouveau la fonction de Helmholtz \mathcal{K} :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{U} = 0 \\ \underbrace{\vec{U} \cdot \nabla \left(G + \frac{p}{\rho} + \frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \right)}_{\mathcal{K} = \text{Fonction de Helmholtz}} = \vec{U} \cdot \left(\nu \Delta \vec{U} - \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right) + \underbrace{\vec{U} \cdot (\vec{U} \times \vec{\Omega})}_{=0} \end{cases} \quad (7.172)$$

où le dernier terme est nul par orthogonalité. Comme le champ de force est conservateur, il est possible de faire apparaître la divergence du champ de vitesse:

$$\vec{U} \cdot (\nabla \mathcal{K}) = \nabla \cdot (\mathcal{K} \vec{U}) - \underbrace{\mathcal{K} (\nabla \cdot \vec{U})}_{=0 \text{ par continuité}} \quad (7.173)$$

Ce dernier terme est nul pour assurer la continuité. Sachant que l'écoulement est stationnaire, la dérivée temporelle dans le membre de droite de l'équation (7.172) s'annule et il est possible d'écrire:

$$\nabla \cdot (\mathcal{K} \vec{U}) = \vec{U} \cdot (\nu \Delta \vec{U}) \quad (7.174)$$

Afin de simplifier cette équation dans le cadre de l'hypothèse unidimensionnelle, chaque membre de l'équation est intégré sur une section quelconque Ω :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathcal{K} \vec{U}) dA = \int_{\Omega} \vec{U} \cdot (\nu \Delta \vec{U}) dA \quad (7.175)$$

Par application du théorème de Leibniz, l'opérateur différentiel peut sortir de l'intégrale:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathcal{K} \vec{U}) dA = \nabla \cdot \int_{\Omega} \mathcal{K} \vec{U} dA - \left[(\mathcal{K} \vec{U}) \cdot (\nabla \Omega_t) \right]_{C_t} \quad (7.176)$$

A nouveau, le second terme est nul pour assurer la stationnarité de l'écoulement si bien que l'équation (7.175) se résume à :

$$\nabla \cdot \int_{\Omega} \mathcal{K} \vec{U} dA - \underbrace{\left[(\mathcal{K} \vec{U}) \cdot (\nabla \Omega_t) \right]_{C_t}}_{=0 \text{ en stationnaire}} = \int_{\Omega} \vec{U} \cdot (\nu \Delta \vec{U}) dA \quad (7.177)$$

Pour simplifier la précédente expression, il est possible d'introduire la valeur moyenne de la fonction d'Helmholtz sur la section transversale. Cependant, ni cette fonction ni le champ de vitesse ne sont uniforme sur la section si bien l'intégrale n'est pas égale à la multiplication des valeurs moyennes par la section transversale :

$$\int_{\Omega} \vec{U} \left(G + \frac{p}{\rho} + \frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \right) d\Omega \neq \Omega \left[\bar{\vec{U}} \left(\bar{G} + \frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{\|\bar{\vec{U}}\|^2}{2} \right) \right] \quad (7.178)$$

Pour assurer l'égalité précédente, il faut introduire des coefficients d'inégale répartition sur la section, qui permettent de tenir compte des effets non-linéaires:

$$\int_{\Omega} \vec{U} \left(G + \frac{p}{\rho} + \frac{\|\vec{U}\|^2}{2} \right) d\Omega = \Omega \left[\bar{\vec{U}} \left(\alpha \bar{G} + \beta \frac{\bar{p}}{\rho} + \gamma \frac{\|\bar{\vec{U}}\|^2}{2} \right) \right] \quad (7.179)$$

La valeur de ces coefficients dépend uniquement de la distribution des paramètres sur la section transversale. Dans la plupart des cas pratiques d'écoulements en conduite, on peut faire l'hypothèse que la distribution de pression est uniforme ou hydrostatique et que le champ de force est constant. Les coefficients α et β sont donc unitaires.

$$\alpha = \beta = 1 \quad (7.180)$$

Comme montré sur la Figure 112, le champ de vitesse est loin d'être uniforme sur la section transversale si bien que la valeur du coefficient γ varie en fonction de cette distribution et peut être calculée sur base de :

$$\gamma = \frac{\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} U^3 d\Omega}{\left(\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} U d\Omega \right)^3} \quad (7.181)$$

Les valeurs pratiques de γ seront démontrées en 12.

L'introduction de ces paramètres d'inégale répartition dans l'équation (7.177) donne la formulation suivante pour le théorème de Bernoulli intégré sur la section transversale d'écoulement :

$$\frac{d}{ds} \left(\alpha \bar{G} + \beta \frac{\bar{p}}{\rho} + \gamma \frac{\|\bar{U}\|^2}{2} \right) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \vec{s} \cdot (\nu \Delta \vec{U}) d\Omega \quad (7.182)$$

Où le terme à droite de l'égalité représente l'ensemble des pertes de charge sur le tronçon infinitésimal ds . Plus précisément, ce terme représente la variation d'énergie entre deux sections séparées d'une longueur ds . Il est indispensable de pouvoir caractériser cette perte afin de pouvoir résoudre l'équation (7.182). L'idéal est de pouvoir relier ce terme aux grandeurs moyennes caractéristiques de l'écoulement. Pour ce faire, les ingénieurs ont identifié deux grands types de pertes et déterminé des lois constitutives ou relations empiriques pour les quantifier.

9.3. Pertes de charge en conduite

On distingue traditionnellement deux grands types de perte de pertes de charge. D'abord, les pertes continues (dites pertes en long) sont dues aussi bien aux frottements des filets fluides entre eux ou contre les parois (dissipation par action des contraintes de viscosité) qu'aux chocs entre particules échangées entre filets voisins (par action des contraintes de turbulence). On comprend assez naturellement que l'intensité des pertes en long dépend directement de la rugosité de la conduite et de l'intensité de la turbulence (caractérisé par le nombre de Reynolds). Ensuite, les pertes locales sont provoquées par des particularités du parcours, comme des changements brusques ou progressifs de section (vannes,...), des changements de direction (coudes, courbes,...),... Chaque type de perte peut être relié à un régime d'écoulement « établi » ou « non établi ».

9.3.1. Formulation générique des pertes en long – analyse dimensionnelle

Le théorème π de Vaschy-Bunckigam permet d'établir une relation fonctionnelle entre la perte de charge entre deux sections transversales d'écoulements et les paramètres hydrodynamiques de cet écoulement entre ces deux sections. Pour ce faire, il faut commencer par l'inventaire des grandeurs susceptibles d'influencer l'écoulement :

- Δp [$L^{-1}MT^{-2}$]: différentiel de pression
- L [L]: longueur de la conduite
- D [L]: diamètre de la conduite
- e [L]: rugosité, dimension des aspérités
- U [LT^{-1}]: vitesse moyenne du fluide
- ρ [$L^{-3}M$]: masse volumique du fluide
- ν [L^2T^{-1}]: viscosité cinématique du fluide

On dispose donc de 7 paramètres pour trois grandeurs primaires linéairement indépendantes. Le rang de la matrice dimensionnelle de ces grandeurs est donc 3 :

$$\begin{bmatrix} & \Delta p & L & D & e & U & \rho & \nu \\ L & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ M & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ T & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.183)$$

Il existe donc 4 produits sans dimension Π indépendants qu'il faut déterminer. La méthode n'indique pas comment choisir ces produits si bien que l'on peut les choisir librement, pour autant que ceux-ci soient adimensionnels. Les quatre produits suivants semblent néanmoins logiques :

- $\Pi_1 = \frac{\Delta p}{D^{\alpha_1} U^{\alpha_2} \rho^{\alpha_3}} = \frac{[L^{-1}MT^{-2}]}{[L]^{\alpha_1} [LT^{-1}]^{\alpha_2} [L^{-3}M]^{\alpha_3}} = \frac{\Delta p}{\rho U^2} [-]$
- $\Pi_2 = \frac{L}{D^{\alpha_1} U^{\alpha_2} \rho^{\alpha_3}} = \frac{[L]}{[L]^{\alpha_1} [LT^{-1}]^{\alpha_2} [L^{-3}M]^{\alpha_3}} = \frac{L}{D} [-]$
- $\Pi_3 = \frac{\varepsilon}{D^{\alpha_1} U^{\alpha_2} \rho^{\alpha_3}} = \frac{[L]}{[L]^{\alpha_1} [LT^{-1}]^{\alpha_2} [L^{-3}M]^{\alpha_3}} = \frac{\varepsilon}{D} [-]$
- $\Pi_4 = \frac{\nu}{D^{\alpha_1} U^{\alpha_2} \rho^{\alpha_3}} = \frac{[L^2T^{-1}]}{[L]^{\alpha_1} [LT^{-1}]^{\alpha_2} [L^{-3}M]^{\alpha_3}} = \frac{\nu}{UD} = \frac{1}{Re} [-]$

Chacun de ces quatre produits possède une signification physique précise. Le nombre Π_1 quantifie le rapport entre la pression statique et la pression dynamique. Le nombre Π_2 quantifie le rapport entre l'échelle longitudinal et l'échelle transversale de l'écoulement. Le nombre Π_3 quantifie le rapport entre l'échelle de rugosité et l'échelle transversale de l'écoulement. Enfin, le

nombre Π_4 quantifie le rapport entre les contraintes de viscosité et les contraintes turbulentes. Le nombre de Reynolds Re apparaît donc naturellement comme l'inverse de ce nombre adimensionnel.

Selon le théorème de Vaschy-Buckingham, il existe une relation fonctionnelle unique entre les quatre produits adimensionnels. En régime établi, on peut donc écrire :

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho U^2} = j(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) = j\left(\frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{1}{Re}\right) \quad (7.184)$$

Tout comme dans le cas d'un écoulement de Poiseuille entre deux plaques, la perte en long sera logiquement linéairement proportionnelle à la longueur L . Autrement dit, la perte de charge sera doublée si la longueur de la conduite est doublée, tous les autres paramètres restant égaux :

$$\Delta p = \frac{L}{D} \rho U^2 j\left(\frac{\varepsilon}{D}, \frac{1}{Re}\right) \quad (7.185)$$

La fonction j est appelée le coefficient de perte de charge en long de l'écoulement et est noté f . Celui-ci ne dépend que de la rugosité relative ε/D de la conduite et du nombre de Reynolds de l'écoulement. Si on exprime la perte de charge en hauteur d'eau, nous obtenons l'équation de Darcy-Weisbach :

$$h_r = \frac{\Delta p}{2\rho g} = f\left(\frac{\varepsilon}{D}, \frac{1}{Re}\right) \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (7.186)$$

Dans le cas d'une conduite non circulaire, le diamètre D est remplacé par un paramètre plus général, le diamètre hydraulique qui est égal à quatre fois le rayon hydraulique. Le rayon hydraulique est défini comme le rapport de la section transversale d'écoulement Ω sur le périmètre mouillé P_Ω :

$$R_h = \frac{\Omega}{P_\Omega} \quad (7.187)$$

9.3.2. Pertes de charge singulières

Principe

Les pertes de charge singulières apparaissent au niveau de toutes perturbations de l'écoulement en régime établi, soit par décollement des parois et formation de tourbillons aux endroits où il y a changement de section ou de direction de la conduite (entrée, sortie, rétrécissement/élargissement, courbure, branchement), soit par modification de l'écoulement en présence d'obstacles (écoulement à travers les ouvertures, les grilles, les dispositifs d'obturation

ou d'étranglement, filtration à travers un corps poreux, écoulement autour de divers obstacles, etc.).

L'écoulement dans ces singularités présente presque toujours des recirculations. Ce phénomène de décollement et de formation de tourbillons est lié à la présence d'une différence des vitesses à travers la section du courant et à un gradient positif de la pression le long de l'écoulement. Ce dernier se produit lors du ralentissement du mouvement (canal divergent) conformément à l'équation de Bernoulli. La différence des vitesses dans la section pour un gradient négatif (mouvement accéléré en canal convergent) ne conduit pas à un décollement. Dans les tronçons convergeant de façon continue, l'écoulement est même plus stable que dans les tronçons à section constante.

Toutes les formes des pertes singulières se produisent sur une longueur plus ou moins grande de la conduite et ne sont pas séparables des pertes par frottement. Cependant, pour la commodité du calcul, il est convenu de les considérer concentrées dans une section et distinctes des pertes par frottement. La sommation est effectuée suivant le principe de la superposition des pertes, d'après lequel on prend la somme arithmétique des pertes par frottement et des pertes singulières.

Les pertes de charge singulières sont fondamentalement liées aux régimes non-établis. Dès lors, il n'est pas possible de relier le coefficient de perte uniquement à la contrainte pariétale comme dans le cas précédent. Il est donc très difficile de représenter théoriquement ces pertes, voire impossible sur base d'une simple analyse dimensionnelle. C'est pourquoi les ingénieurs ont recours majoritairement à l'expérimentation et à des recueils de pertes de charge (Idelcik) pour évaluer l'intensité de ces pertes de charge. Des méthodes plus modernes mais encore peu fréquentes font également appel à des logiciels de modélisation 3D de l'écoulement.

Formulation générale

D'une manière générale, la formulation pratique d'une perte de charge locale est basée sur une extension de la formulation relative aux pertes en long. Elle prend la forme simple suivante :

$$Perte = k \frac{U^2}{2g} \quad [m] \quad (7.188)$$

où k est le coefficient adimensionnel de perte de charge et la vitesse U est une vitesse de référence (souvent la valeur maximale de la vitesse transversale moyenne). Il faut noter que les pertes de charges en long s'accordent à cette formule générale si $k=fL/D$. La valeur de k doit donc être déterminée sur base de tables ou expérimentations.

Formule de Bélanger – élargissement brusque

Le coefficient de perte local peut être déterminé dans le cas particulier d'un élargissement brusque. Pour y arriver, il est cependant nécessaire de poser des hypothèses fortes telles que la distribution de vitesse uniforme, le nombre de Reynolds $Re > 3500$ et l'écoulement stationnaire (débit uniforme $V_1 A_1 = V_2 A_2$) ainsi qu'une distribution adéquate des réactions des parois dans la direction de l'écoulement. Sous ces hypothèses, la formule de Bélanger va être établie.

$$k = \frac{\Delta h}{\frac{u_1^2}{2g}} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \quad (7.189)$$

Où u_1 est la vitesse moyenne dans la conduite de section minimale (Figure 119).

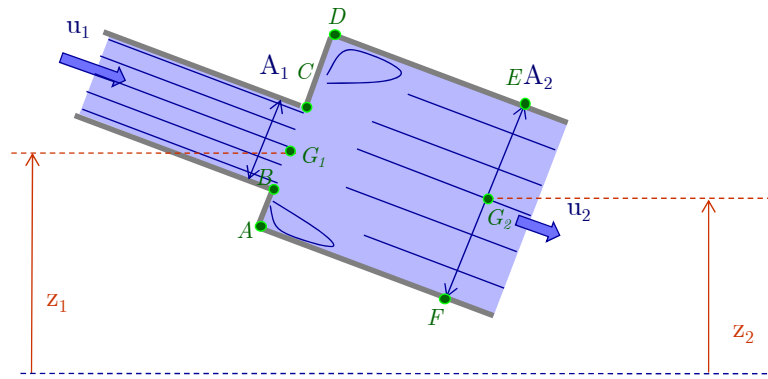


Figure 119 : Coefficient de perte de charge dans un élargissement brusque

Démonstration de la formule de Bélanger

Puisque la finalité consiste à quantifier la perte d'énergie, écrivons la fonction de Helmholtz, ou charge totale H , dans deux sections enserrant l'élargissement. Au centre de gravité G_1 de la section 1, la charge totale vaut :

$$H_1 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} \quad (7.190)$$

Où z est la hauteur (par rapport à un plan de référence arbitraire – voir section 5) du centre de gravité de la section 1. De manière similaire, la charge totale au centre de gravité G_2 de la section 2 vaut :

$$H_2 = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} \quad (7.191)$$

Par définition, la perte de charge totale entre les sections 1 et 2 vaut :

$$\Delta H = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} \right) \quad (7.192)$$

Afin d'évaluer a posteriori cette perte de charge, résolvons d'abord l'écoulement en appliquant la conservation de quantité de mouvement sur le volume $ABCDEF$ selon l'axe x . Perpendiculairement à cet axe, l'hypothèse de vitesse faible aboutit classiquement à simplifier la quantité de mouvement en une distribution hydrostatique de pression avec la composante gravitaire adaptée à l'axe considéré. On notera que cette hypothèse est discutable juste après l'élargissement, en particulier si des recirculations se développent, ce qui limite les rapports de section où cette approche peut être validée.

En écoulement stationnaire, le théorème de Reynolds conduit à faire un bilan des flux passant à travers les bords de contrôle. La conservation de masse s'écrit ainsi :

$$u_1 A_1 = u_2 A_2 = Q \quad (7.193)$$

De même, le premier membre de la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe x s'écrit, pour une distribution uniforme de vitesse sur la section :

$$\rho(u_1^2 A_1 - u_2^2 A_2) = \rho Q(u_1 - u_2) \quad (7.194)$$

Pour construire le second membre, il est nécessaire d'inventorier toutes les forces extérieures agissant sur ce volume de contrôle. D'une part, il s'agit de la projection de la pesanteur selon l'axe x :

$$\rho g A_2 L \sin \theta \quad (7.195)$$

D'autre part, la résultante de la pression sur la face EF du volume de contrôle :

$$p_2 A_2 \quad (7.196)$$

Enfin, il faut tenir compte de la pression sur la face CB du volume de contrôle. Comme le centre de la section 1 ne correspond pas au centre de la section 2, il faut tenir compte du décalage entre le centre de gravité G_1 de la section 1 et le centre de gravité GS de la distribution de pression sur AD . Comme justifié avant, la pression est supposée hydrostatique perpendiculairement à la direction principale d'écoulement, pour toute section transversale, y compris à la transition brusque. La pression AD vaut donc :

$$(p_1 - a\gamma) A_2 \quad (7.197)$$

Finalement, la longueur entre les deux sections de contrôle vaut :

$$L \sin \theta = (z_1 + a) - z_2 \quad (7.198)$$

Dès lors, l'égalité des deux membres de la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe x entre G_1 et G_2 s'écrit :

$$\rho Q(u_1 - u_2) = -\rho g A_2 L \sin \theta - (p_1 - a\gamma) A_2 + p_2 A_2 \quad (7.199)$$

L'équation (7.199) signifie que la variation de quantité de mouvement entre les sections 1 et 2 est égale à la résultante nette de forces agissant sur le volume de contrôle défini par ces deux sections, à savoir les deux champs de pression et la gravité.

En divisant par $A_2 g$ et en introduisant l'expression de la longueur L donné par l'équation (7.198), l'équation (7.199) devient :

$$\frac{Q(u_1 - u_2)}{A_2 g} + (z_1 + a - z_2) + \left(\frac{p_1}{\gamma} - a \right) - \frac{p_2}{\gamma} = 0 \quad (7.200)$$

En réarrangeant les termes, on obtient simplement :

$$\frac{u_2(u_1 - u_2)}{g} + \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = 0 \quad (7.201)$$

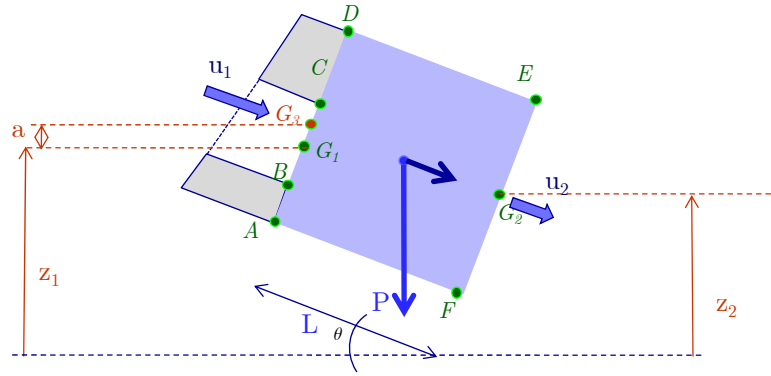


Figure 120: Forces agissant sur le volume de contrôle

En comparant cette formulation, solution du problème, avec l'expression de la perte de charge donnée dans l'équation (7.192), on retrouve certains termes similaires. Il vient ainsi :

$$\Delta H - \frac{u_1^2}{2g} + \frac{u_2^2}{2g} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \quad (7.202)$$

Introduisant l'équation (7.202) dans l'expression (7.201), afin de ne plus exprimer la perte de charge qu'en fonction des vitesses :

$$\frac{u_2(u_1 - u_2)}{g} + \Delta H - \frac{u_1^2}{2g} + \frac{u_2^2}{2g} = 0 \quad (7.203)$$

si bien que la perte de charge peut s'exprimer :

$$\Delta H = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} \right) = \frac{u_2(u_2 - u_1)}{g} + \frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g} \quad (7.204)$$

Par simple application des relations algébriques relatives au carré d'une somme, on a :

$$\Delta H = \frac{u_2(u_2 - u_1)}{g} + \frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g} = \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g} \quad (7.205)$$

Par continuité (7.193) appliquée à l'équation (7.204), il vient finalement :

$$\Delta H = \frac{u_2^2}{2g} \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 = \frac{u_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \quad (7.206)$$

Ce qui correspond à la formule de Bélanger.

Remarquons encore que toute autre hypothèse sur les réactions de parois peut fondamentalement modifier cette expression, validée expérimentalement dans certaines gammes d'élargissement.

9.4. Interprétation du théorème de Bernoulli macroscopique

Sur base de ces formulations pour les pertes de charges locales et en long, nous pouvons établir une formulation du théorème de Bernoulli macroscopique entre deux sections A et B . Ces deux sections sont distantes d'une longueur L et comprennent N tronçons de longueur L_i et diamètre D_i ($i=1,N$) et M pertes de charge locales identifiées. Sur base de l'équation (7.182), nous obtenons dès lors théorème de Bernoulli macroscopique:

$$\left(\alpha \bar{G} + \beta \frac{\bar{p}}{\rho} + \gamma \frac{\|\bar{U}\|^2}{2} \right)_B - \left(\alpha \bar{G} + \beta \frac{\bar{p}}{\rho} + \gamma \frac{\|\bar{U}\|^2}{2} \right)_A = \sum_{i=1,N} f_i \frac{L_i}{D_i} \frac{U_i^2}{2g} + \sum_{j=1,M} k_j \frac{U_j^2}{2g} \quad (7.207)$$

Physiquement, nous savons que le théorème de Bernoulli macroscopique traduit la conservation de l'énergie spécifique moyenne entre deux sections d'écoulements. En analysant l'équation (7.207), il apparaît très clairement 3+1 composantes :

- l'énergie cinétique ;
- l'énergie potentielle stockée sous forme de pression ;
- l'énergie potentielle stockée sous forme d'énergie de gravité ;
- les pertes d'énergie locales et en long.

Toutes ces énergies sont d'origine intégrale et sont donc définies à une constante additive près. Ces constantes sont déterminées en fixant un plan ou niveau de référence, correspondant à une valeur d'énergie nulle. Sur base de ce plan de référence, et en l'absence de pertes de charge, le théorème de Bernoulli généralisé s'écrit simplement :

$$h + \beta \frac{\bar{p}}{\rho g} + \gamma \frac{\|\bar{U}\|^2}{2g} = C \quad (7.208)$$

Dans cette expression, tous les termes sont exprimés en hauteur de fluide. Les hydrauliciens font souvent appel à une représentation graphique de cette expression. Cette représentation consiste à reporter (Figure 121) sur un schéma de la canalisation considérée et à la verticale de chaque point les trois valeurs intervenant dans l'expression (7.208). La somme de deux énergies potentielles donne la hauteur de charge piézométrique et définit la ligne piézométrique:

$$H^{piezo} = h + \beta \frac{\bar{p}}{\rho g} \quad (7.209)$$

La somme de la charge piézométrique et de l'énergie cinétique donne la charge totale et définit la ligne de charge :

$$H^{total} = h + \beta \frac{\bar{p}}{\rho g} + \gamma \frac{\|\vec{U}\|^2}{2g} \quad (7.210)$$

Cette charge totale est évidemment constante en l'absence terme source par application du théorème de Bernoulli. Si maintenant la canalisation comporte des machines génératrices (pompes) ou réceptrices (turbines), la ligne de charge subit des relèvements ou abaissements associés aux énergies reçues ou fournies par le fluide.

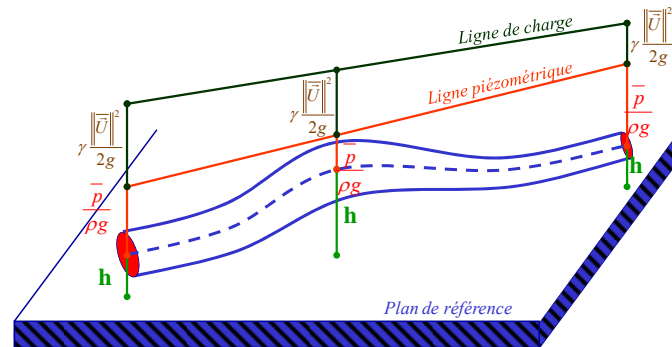


Figure 121: Représentation graphique de la ligne piézométrique et de la ligne de charge

De même, si on tient compte des pertes de charge, la ligne de charge diminue au fur et à mesure que l'énergie est consommée par des pertes en long ou locale. Dans le cas des pertes en long, à la fois la ligne de charge et la ligne piézométrique présentent une pente. Plus les pertes sont importantes, plus la pente est grande. Dans le cas d'une perte locale, la ligne de charge subit une forte diminution au niveau de la perturbation (Figure 122). Par contre, ce n'est pas forcément le cas de la ligne piézométrique. Dans le cas d'un élargissement brusque, la vitesse du fluide diminue fortement au niveau de la discontinuité, si bien que la perte de charge est compensée par un accroissement de pression.

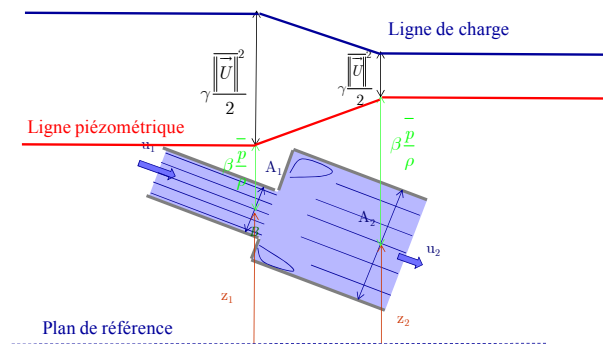


Figure 122: Ligne de charge et ligne piézométrique en présence d'une perte de charge locale

10. Écoulement laminaire en conduite – Écoulement de Poiseuille

10.1. Position du problème

Considérons le cas simplifié d'un fluide incompressible newtonien, d'une conduite circulaire inclinée et d'un écoulement laminaire établi dont les lignes de courant sont parallèles aux parois (Figure 123). Comme cela est démontré dans la section suivante, le profil de vitesse sur la section transversale s'écrit :

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{d}{dx} (p + \rho gh) (r^2 - r_0^2) \quad (7.211)$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide, r la variable radiale et r_0 le rayon de la conduite. Cette équation est manifestement parabolique en fonction de la variable r . La vitesse est maximale au centre de la conduite et nulle aux parois. Ce profil ne dépend ainsi que du gradient de charge piézométrique et de la viscosité.

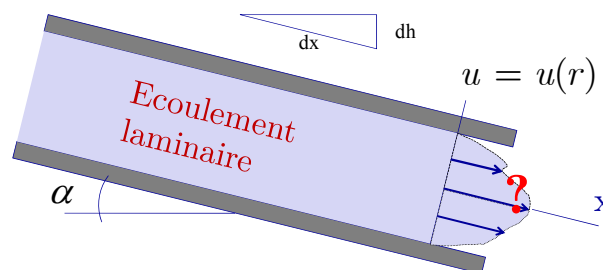


Figure 123: Quel est le profil de vitesse dans un écoulement laminaire en conduite circulaire ?

10.2. Etablissement du profil de vitesse

10.2.1. Modèle mathématique

Pour démontrer l'équation (7.211), il faut se baser sur les équations de Navier-Stokes incompressibles pour un fluide Newtonien:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_k)}{\partial x_k} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i \end{cases} \quad (7.212)$$

où le champ de force $\vec{F} = (0 \ 0 \ g)$ ne comprend que la gravité.

Les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques (x, r, θ) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + v_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + u \frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{v_\theta^2}{r} &= g \cos \alpha \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + u \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= g \cos \alpha \cos \theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (7.213)$$

Par application de l'hypothèse de stationnarité de l'écoulement, il vient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = 0 \quad (7.214)$$

Puisque les lignes de courant sont supposées parallèles à l'axe de la conduite et ne subissent aucune rotation autour de celui-ci, il est possible d'en déduire :

$$v_r = v_\theta = 0 \quad (7.215)$$

Puisque le régime est supposé établi et symétrique :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (7.216)$$

En introduisant les équations (7.214)-(7.216) dans l'équation (7.213), les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindrique se simplifient comme suit :

$$\begin{aligned} 0 &= g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ 0 &= g \cos \alpha \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ 0 &= g \cos \alpha \cos \theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (7.217)$$

10.2.2. Solution analytique

Par simple relation géométrique (Figure 123), l'angle d'inclinaison de la conduite s'écrit :

$$\sin \alpha = -\frac{dh}{dx} \quad (7.218)$$

De même, les relations de l'analyse mathématique stipulent que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (7.219)$$

En introduisant les équations (7.218) et (7.219) dans la quantité de mouvement simplifiée selon l'axe x (7.217), il vient :

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial (p + \rho gh)}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) \quad (7.220)$$

Pour obtenir l'équation (7.220), il faut faire l'hypothèse que le champ de pression p ne dépend ni la variable r , ni de la variable θ . Autrement dit, le champ de pression est supposé uniforme.

Le terme de gauche de l'égalité (7.220) ne dépend pas de la variable indépendante r et sera noté λ . L'équation se réécrit alors :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \lambda r \quad (7.221)$$

Cette équation différentielle totale est facilement intégrable selon r . La solution canonique s'écrit :

$$r \frac{du}{dr} = \frac{\lambda}{2} r^2 + A \quad (7.222)$$

où A est une constante d'intégration. En divisant chacun des termes par r , on peut intégrer une seconde fois selon r et on obtient :

$$u(r) = \frac{\lambda}{4} r^2 + A \ln r + B \quad (7.223)$$

où B est une seconde constante d'intégration. Pour déterminer la valeur des constantes d'intégration, il faut imposer que la vitesse au centre de la conduite est finie :

$$u(r=0) \neq \infty \rightarrow A = 0 \quad (7.224)$$

Et que la vitesse aux parois de l'écoulement est nulle :

$$u(r=r_0) = 0 \rightarrow B = -\frac{\lambda}{4} r_0^2 \quad (7.225)$$

Le profil de vitesse s'écrit donc :

$$\begin{aligned} u(r) &= \frac{\lambda}{4} (r^2 - r_0^2) \\ &= \frac{1}{4\mu} \frac{d}{dx} (p + \rho gh) (r^2 - r_0^2) \end{aligned} \quad (7.226)$$

10.3. Vitesse moyenne

Par définition, la vitesse moyenne dans une conduite est donnée par le débit total divisé par la section d'écoulement et le débit est l'intégrale de la vitesse locale sur la section d'écoulement :

$$\bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{\int_A u dA}{A} \quad (7.227)$$

Pour un cercle, la section vaut $A=\pi r^2$. Par un simple changement de variable, $dA=2\pi r dr$, la vitesse moyenne s'écrit :

$$\bar{u} = \frac{\int_0^{r_0} u(r) 2\pi r dr}{\pi r_0^2} \quad (7.228)$$

En introduisant l'équation (7.226) au sein de l'intégrale, il vient très naturellement :

$$\bar{u} = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} \frac{1}{4\mu} \frac{d}{dx} (p + \rho gh) (r^2 - r_0^2) r dr = -\frac{r_0^2}{8\mu} \frac{d(p + \rho gh)}{dx} \quad (7.229)$$

Le signe négatif s'explique par une vitesse positive pour un gradient de pression négatif.

10.4. Vitesse maximale

La distribution parabolique (7.226) atteint sa valeur maximale au centre de la conduite ($r=0$).

Celle-ci vaut :

$$u_{\max} = \frac{r_0^2}{4\mu} \left| \frac{d(p + \rho gh)}{dx} \right| \quad (7.230)$$

Qui est le double de la vitesse moyenne.

10.5. Perte de charge en long

Connaissant le profil de vitesse dans la conduite donné par l'équation (7.226) et l'expression (7.186) de la perte de charge en long selon Darcy-Weisbach, il est possible d'en tirer l'expression du coefficient de frottement en long en fonction des paramètres de la conduite et de l'écoulement moyen. En réarrangeant l'expression de la vitesse moyenne dans l'écoulement (7.229) :

$$\Delta \left(\frac{p}{\rho g} + h \right) = \frac{1}{\rho g} \frac{8\mu \bar{u} L}{r_0^2} \quad (7.231)$$

Or, l'expression macroscopique de la variation d'énergie explicitée avec la relation de Darcy-Weisbach s'écrit :

$$\Delta \left(\frac{p}{\rho g} + h \right) = f \frac{L}{D} \frac{\bar{u}^2}{2g} \quad (7.232)$$

Par identification entre les deux équations précédentes, le coefficient de frottement f s'écrit :

$$f = \frac{64\nu}{Du} = \frac{64}{\text{Re}} \quad \text{puisque} \quad \text{Re} = \frac{Du}{\nu} \quad (7.233)$$

Cette formulation correspond à la relation (7.267) de Hagen-Poiseuille pour les écoulements laminaires.

10.6. Profil des contraintes visqueuses

Dès lors que les caractéristiques de l'écoulement sont connues, il est possible de calculer la distribution des contraintes visqueuses à partir du profil de vitesse. Pour ce faire, un volume de contrôle cylindrique (Figure 124) peut être considéré. En stationnaire, les flux de quantité de mouvement entrant et sortant se compensent et il y a donc équilibre des forces extérieures. Sur chacune des faces circulaires, les forces de pression p et $p+dp$ s'exercent selon l'axe x . De même, la projection selon l'axe x de la force de gravité agissant sur le cylindre s'écrit :

$$\rho g \pi r^2 \sin \alpha dx = \rho g \pi r^2 dh \quad (7.234)$$

Enfin, seules les contraintes visqueuses agissent sur le pourtour du cylindre dans la direction principale d'écoulement:

$$\tau 2\pi r dx \quad (7.235)$$

En exprimant l'équilibre du volume de contrôle selon l'axe x , nous avons :

$$p\pi r^2 + \rho g \pi r^2 dh = \tau 2\pi r dx + (p + dp)\pi r^2 \quad (7.236)$$

En simplifiant, nous avons :

$$\tau = -\frac{r}{2} \frac{d(p + \rho gh)}{dx} \quad (7.237)$$

La contrainte visqueuse est donc directement proportionnelle au rayon et atteint son maximum aux parois de la conduite :

$$\tau_{r=r_0} \triangleq \tau_0 = -\frac{r_0}{2} \frac{d(p + \rho gh)}{dx} \quad (7.238)$$

Cette contrainte pariétale peut ainsi s'exprimer en fonction de la vitesse moyenne dans la conduite en utilisant le résultat (7.229) :

$$\Delta(p + \rho gh) = \frac{2\tau_0 L}{r_0} = \frac{8\mu \bar{u} L}{r_0^2} \Rightarrow \tau_0 = \frac{4\mu \bar{u}}{r_0} \quad (7.239)$$

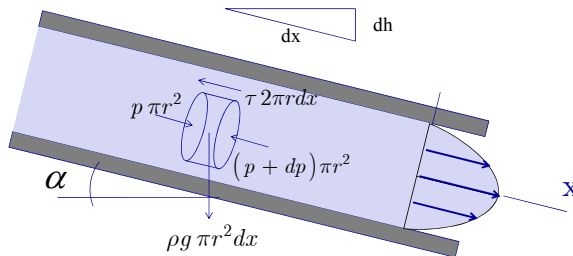


Figure 124: Forces de pression, gravité et tensions visqueuses agissant sur un volume de contrôle cylindrique

11. Écoulement turbulent en conduite

11.1. Écoulement turbulent sur paroi lisse

11.1.1. Validité du profil universel de vitesse

L'expérience montre que la distribution du profil universel de vitesse de Prandtl est aussi applicable dans le cas d'un écoulement turbulent en conduite. Il a également été observé que la distribution des contraintes de cisaillement (somme des tensions visqueuses et turbulentes) varie linéairement selon le rayon de la conduite comme cela avait été démontré analytiquement pour un écoulement laminaire.

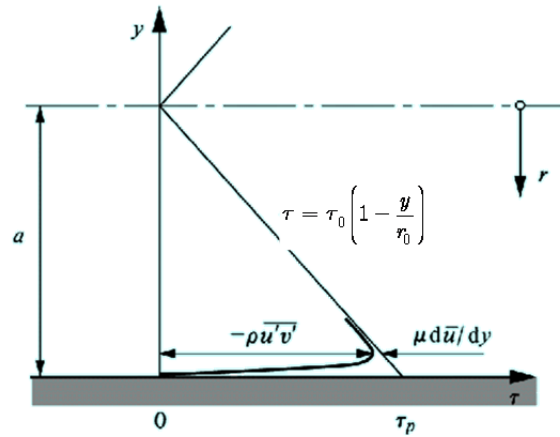


Figure 125: Evolution des tensions visqueuses et turbulentes dans le cas d'une conduite circulaire

Dans la zone 1 (sous-couche laminaire), la composante turbulente est évidemment nulle.

Dans la zone 2, l'expérience confirme la loi logarithmique (7.91). Par comparaison et calage aux résultats expérimentaux, la formulation utile est :

$$u^+ = 5.75 \log y^+ + 5.50 \quad (7.240)$$

Dans la zone 3, la vitesse déficitaire s'exprime par :

$$\frac{\bar{U}_c - \bar{u}}{u^*} = g\left(\frac{y}{r_0}\right) \quad (7.241)$$

où \bar{U}_c est la vitesse au centre du tube et g est une fonction déterminée expérimentalement par Nikuradse en 1933.

11.1.2. Pertes de charge en long

Formulation selon Prandtl

Etablie d'après une analyse dimensionnelle, l'expression générique de la perte de charge en long de Darcy-Weisbach (7.232) reste valable en écoulement turbulent. De plus, la distribution des contraintes variant de façon linéaire, il vient, tout comme en laminaire :

$$\frac{d\left(\frac{p}{\rho} + gh\right)}{dx} = \frac{f}{2r_0} \frac{\rho u_m^2}{2} = \frac{2\tau_0}{r_0} \quad (7.242)$$

De façon générale, il faut bien faire attention de ne pas confondre vitesse locale moyenne de l'écoulement turbulent (\bar{u}) et vitesse moyenne sur la section (\bar{u}_m).

Compte tenu de la définition de la vitesse de frottement (7.68), (7.242) devient :

$$\frac{\bar{u}_m}{u^*} = \sqrt{\frac{8}{f}} \quad (7.243)$$

Il est ainsi nécessaire de trouver des relations pour \bar{u}_m et u^* .

Dans ce but, pour évaluer la vitesse moyenne sur la section, Prandtl propose d'utiliser l'expression de la zone 2 :

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u^*} = C_1 \log\left(\frac{u^* y}{\nu}\right) + C_2 = C_1 \log y^+ + C_2 = \frac{1}{K} \ln y^+ + C_2 \quad (7.244)$$

Ainsi :

$$\bar{u}_m = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \bar{u}(r) 2\pi r dr = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} \bar{u}(r) r dr = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} \bar{u}(r) (r_0 - y) dy \quad (7.245)$$

Le calcul est simplifié par l'introduction de nouvelles variables :

$$\begin{aligned} z &= \frac{y}{r_0} = \frac{y^+}{r_0^+} \\ r_0^+ &= \frac{u^* r_0}{\nu} \end{aligned} \quad (7.246)$$

(7.245) devient donc :

$$\frac{\bar{u}_m}{u^*} = 2 \left[\int_0^{r_0} u^+ d\left(\frac{y}{r_0}\right) - \int_0^{r_0} u^+ \frac{y}{r_0} d\left(\frac{y}{r_0}\right) \right] \quad (7.247)$$

La modification des bornes d'intégration amène à :

$$\frac{\bar{u}_m}{u^*} = 2 \left[\int_0^1 u^+ (z r_0^+) d(z) - \int_0^1 u^+ (z r_0^+) z d(z) \right] \quad (7.248)$$

Et compte-tenu des solutions des deux intégrales :

$$\int_0^1 [\eta \ln(1-\eta)] d\eta = \left[\frac{1}{2} \eta^2 \ln(1-\eta) \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\eta^2}{1-\eta} d\eta$$

$$\int_0^1 \frac{\eta^2}{1-\eta} d\eta = \left[-\frac{\eta^2}{4} - \frac{\eta}{2} - \frac{1}{2} \ln(1-\eta) \right]_0^1$$
(7.249)

L'expression de la vitesse moyenne sur la section prend la forme :

$$u^+(zr_0^+) = \frac{1}{K} \ln(zr_0^+) + C_2 = \frac{1}{K} \ln z + \frac{1}{K} \ln r_0^+ + C_2$$
(7.250)

$$\frac{\bar{u}_m}{u^*} = \frac{1}{K} \ln r_0^+ + C_2 - \frac{3}{2K}$$
(7.251)

De (7.251) et (7.243), il vient :

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{1}{K} \ln \left(\frac{1}{2\sqrt{8}} \text{Re} \sqrt{f} \right) + C_2 - \frac{3}{2K}$$
(7.252)

Avec $\text{Re} = \frac{\bar{u}_m 2r_0}{\nu}$

En introduisant les valeurs numériques $K = 0,40$ et $C_2 = 5,5$, la loi implicite de Prandtl s'exprime comme :

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = 1,99 \log(\text{Re} \sqrt{f}) - 0,84$$
(7.253)

Par ajustement des coefficients vis-à-vis de l'expérience, (7.253) devient :

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = 2 \log(\text{Re} \sqrt{f}) - 0,8 = -2 \log \left(\frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right)$$
(7.254)

Cette dernière loi fournit des résultats en excellente concordance pour un nombre de Reynolds compris entre $4 \cdot 10^3$ et $4 \cdot 10^6$.

Formulation avec le profil de vitesse usuel

Outre les développements réalisés par Prandtl, il est également possible, de façon similaire à la couche limite turbulente, d'utiliser un profil de vitesse simplifié :

$$\frac{\bar{u}}{U_c} = \left(\frac{y}{r_0} \right)^{\frac{1}{n}}$$
(7.255)

Avec un paramètre n dépendant du nombre de Reynolds :

$\text{Re} = 4 \cdot 10^3$	$\text{Re} = 10^5$	$\text{Re} = 2 \cdot 10^6$
n=6	n=7	n=10

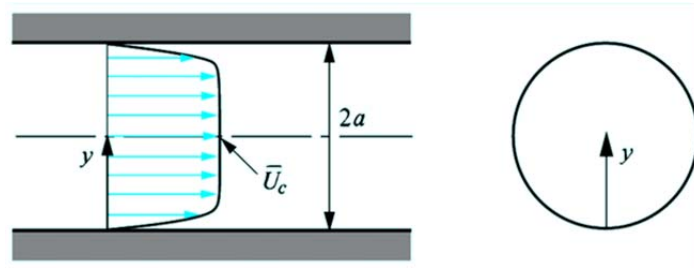


Figure 126: Profil de vitesse simplifié pour un écoulement turbulent en conduite circulaire

Formulation selon Blasius

Blasius a ainsi proposé une formulation à partir de $u^+ = 8,74y^{+\frac{1}{7}}$, valable dans la tranche $4 \cdot 10^3 < Re < 10^5$:

$$f = 0,316 Re^{-\frac{1}{4}} \quad (7.256)$$

L'avantage de cette dernière formulation est bien entendu d'être totalement explicite.

11.2. Écoulement turbulent sur paroi rugueuse

11.2.1. Notion de rugosité

Il est extrêmement important de rappeler que l'ensemble des développements précédents ont été effectués pour des éléments imperméables totalement lisses. Cet aspect de surface n'empêche bien entendu en aucun cas le développement de pertes en long étant donné que celles-ci sont le fait des conditions de non-glissement du fluide à la paroi.

En complément des résultats précédents, et pour fournir des lois utilisables dans la pratique courante de l'ingénieur, il est cependant nécessaire de tenir compte d'imperfections dans le fini de surface des tuyauteries utilisées.

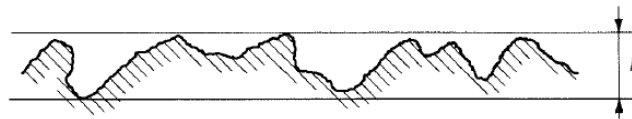


Figure 127: Imperfections de surface

La rugosité des parois peut être caractérisée notamment par :

- la distribution spatiale ;
- la forme géométrique ;
- la densité ;
- la hauteur ;
- ...

Après avoir établi les développements généraux de Prandtl, il est aisé de comprendre que si la hauteur maximale des rugosités k est inférieure à l'épaisseur de la sous-couche visqueuse (laminaire), il n'y aura pas d'influence de celles-ci sur la distribution de vitesse universelle et le frottement à la paroi. Dans ce cas, l'approximation d'une paroi lisse est donc valable.

11.2.2. Expériences de Nikuradse

C'est Nikuradse qui s'est principalement intéressé à l'influence des rugosités de conduite sur les pertes de charge en long. Il a mené une campagne d'essai extrêmement importante en se basant sur une approximation d'une surface rugueuse par une surface « standardisée » qui produit le même effet global dans la zone de vitesse n°2. Cette surface standardisée était générée par l'application de grains de sable calibrés sur l'intérieur d'une conduite lisse.

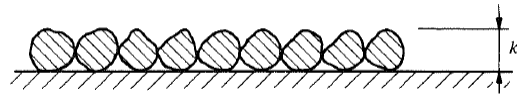


Figure 128: Grains de sable équivalent

Nikuradse a ainsi défini la notion de « grains de sable équivalents » d'une hauteur k_s pour laquelle la grandeur adimensionnelle suivante a été définie :

$$k_s^+ = \frac{k_s u^*}{\nu} \quad (7.257)$$

En fonction de ce paramètre adimensionnel, trois régions sont possibles :

- Région lisse $k_s^+ < 5$: les protubérances sont entièrement dans la région laminaire
- Région transitoire $5 < k_s^+ < 70$
- Région brute $k_s^+ > 70$: les protubérances sont hors de la sous-couche laminaire

Il faut bien noter que ces régions sont définies selon le paramètre adimensionnel. Une même conduite, avec une certaine rugosité absolue, peut donc apparaître tantôt lisse, tantôt rugueuse en fonction du type d'écoulement turbulent qui va s'y développer.

Cette constatation peut être étendue sur la longueur de la conduite où le développement progressif de la couche limite peut également faire évoluer la région de lisse à brute.

11.2.3. Pertes de charge en long

Les résultats de Nikuradse ont démontré que l'expression de la vitesse universelle dans la zone 2 est toujours valable pour autant que la seconde constante devienne une fonction dépendante de k_s^+ :

$$u^+ = C_1 \log y^+ + C_2(k_s^+) \quad (7.258)$$

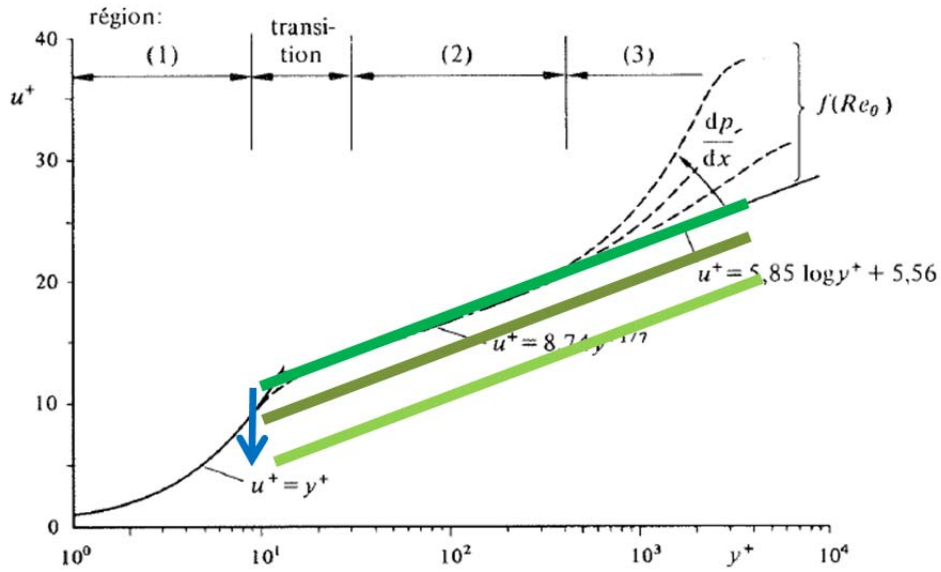


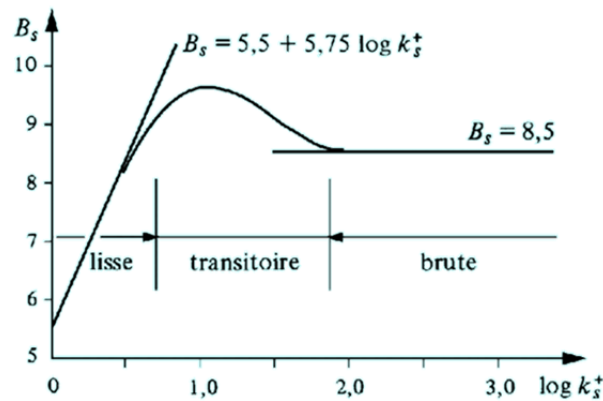
Figure 129: Modification de la zone deux d'après Nikuradse

Physiquement, une valeur de $k_s^+ < 5$ correspond à une hauteur $k_s < 0.01$ mm à des nombres de Reynolds élevés. Les tubes industriels vérifient rarement une telle tolérance.

Selon Nikuradse, le coefficient de la distribution de vitesse dans la zone 2 s'exprime d'après l'expérience :

$$C_2 = B_s - 5,75 \log k_s^+ \quad (7.259)$$

- dans la région lisse : $B_s = 5,5 + 5,75 \log k_s^+ \Rightarrow C_2 = 5,5$
- dans la région transitoire : B_s est variable et présente un extremum
- dans la région brute : B_s est constante égale à 8.5

Figure 130: Evolution de B_s en fonction de la région d'écoulement

Pour la region brute, l'introduction de (7.259) dans (7.252) donne :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{8}{f}} &= \frac{1}{K} \ln \left(\frac{1}{2} \frac{\bar{u}_m D}{\nu} \sqrt{\frac{f}{8}} \right) + 8,5 - 5,75 \log \frac{k_s u^*}{\nu} - \frac{3}{2K} \\
\sqrt{\frac{8}{f}} &= \frac{1}{0,4} \ln \left(\frac{u^* r}{\nu} \right) + 4,75 - 5,75 \log \frac{k_s u^*}{\nu} \\
\sqrt{\frac{8}{f}} &= \frac{\ln 10}{0,4} \log \left(\frac{u^* r}{\nu} \right) + 4,75 - 5,75 \log \frac{k_s u^*}{\nu} \\
\sqrt{\frac{8}{f}} &= 5,75 \log \left(\frac{u^* r}{\nu} \right) + 4,75 - 5,75 \log \frac{k_s u^*}{\nu} \\
\sqrt{\frac{8}{f}} &= 5,75 \left(\log \frac{u^*}{\nu} + \log r \right) + 4,75 - 5,75 \left(\log \frac{u^*}{\nu} + \log k_s \right) \\
\sqrt{\frac{8}{f}} &= 5,75 \log \frac{r}{k_s} + 4,75
\end{aligned} \tag{7.260}$$

Une mise en forme finale, en utilisant adéquatement le diamètre D de la conduite, permet d'aboutir à :

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = -2 \log \left(\frac{k_s}{3,7D} \right) \tag{7.261}$$

11.2.4. Généralisation aux tuyaux industriels

Les courbes pour **les tuyaux industriels** s'écartent cependant des **expériences de Nikuradse** étant donné que la rugosité n'est pas de taille fixe mais présente souvent une distribution assez étendue. Cela se traduit concrètement par une absence d'extrema dans la région transitoire comme illustré à la

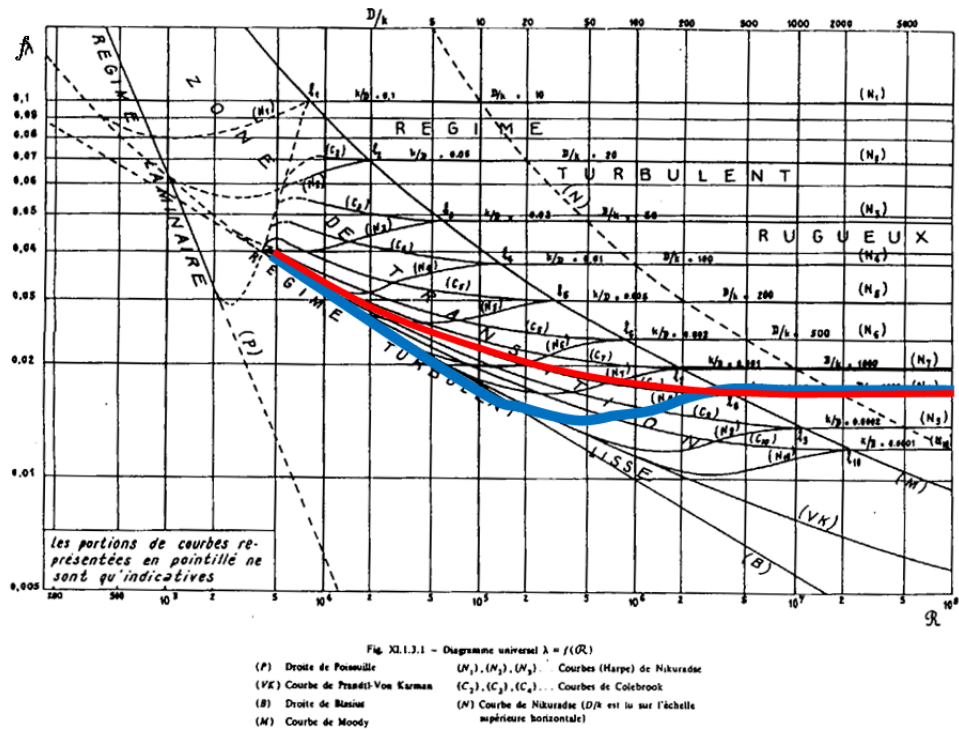


Figure 131: Différence entre les tuyaux industriels et les expériences de Nikuradse

11.2.5. Formulation de Colebrook-White

Dans la pratique, c'est la formule de Colebrook-White qui peut être utilisée à la fois pour les écoulements turbulents et transitoires. Cette formule résulte de la superposition de la loi de Prandtl (7.254) et de Nikuradse (7.261) en généralisant la taille des grains de sable en une dimension caractéristique de la rugosité ε :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} + \frac{\varepsilon}{3.7D} \right) \quad (7.262)$$

Dans le cas d'une conduite non circulaire, il est nécessaire de calculer un diamètre équivalent via :

$$D = \frac{4A}{L}$$

A est la section
 L est le périmètre

(7.263)

12. Coefficient d'inégale répartition de vitesse dans Bernoulli intégré

Maintenant que les profils de vitesse ont été établis dans le cas d'écoulements laminaires et turbulents, il est possible de calculer le coefficient d'inégale répartition de vitesse de l'équation de Bernoulli intégrée sur la section.

12.1. Pour un écoulement laminaire

Sur base du profil de vitesse (7.226) et de l'expression de la vitesse moyenne (7.229) en fonction du gradient de pression, il est maintenant possible d'établir une valeur pour le coefficient d'inégale répartition de vitesse (7.181) apparaissant dans le théorème de Bernoulli macroscopique :

$$\gamma = \frac{\frac{1}{32\mu^3 r_0^2} \left(\frac{d(p + \rho gh)}{dx} \right)^3 \int_0^{r_0} (r^2 - r_0^2)^3 r dr}{\left(-\frac{r_0^2}{8\mu} \frac{d(p + \rho gh)}{dx} \right)^3} \quad (7.264)$$

Où la section d'écoulement est exprimée en fonction du rayon $\Omega = \pi r^2$. L'équation (7.264) est facilement intégrable selon r et il vient :

$$\gamma = \frac{\frac{1}{32\mu^3 r_0^2} \left(\frac{d(p + \rho gh)}{dx} \right)^3 \frac{-r_0^8}{8}}{\left(-\frac{r_0^2}{8\mu} \frac{d(p + \rho gh)}{dx} \right)^3} = 2 \quad (7.265)$$

12.2. Pour un écoulement turbulent

Pour un écoulement turbulent, en utilisant le profil de vitesse turbulent selon (7.255) :

$$u(r) = \left[\frac{(r - r_0)}{r_0} \right]^{\frac{1}{n}} U_0 \quad (7.266)$$

Il vient :

Tableau 6: Valeurs du coefficient d'inégale répartition de vitesse dans les écoulements turbulents

Re	n	γ
4.10^3	6	1.077
1.10^4	7	1.058
2.10^5	10	1.031

13. Récapitulatif des pertes de charge

13.1. Diagramme de Moody-Stanton

Il a été démontré qu'il existe de multiples formulations pour le coefficient de frottement f . Un excellent résumé de ces formulations est donné sous forme graphique par le diagramme de Moody-Stanton qui exprime la variation du coefficient de frottement f en fonction du nombre de Reynolds Re et de la rugosité relative.

En raison de la grande amplitude de variation du nombre de Reynolds, on utilise généralement des graduations logarithmiques sur les deux axes.

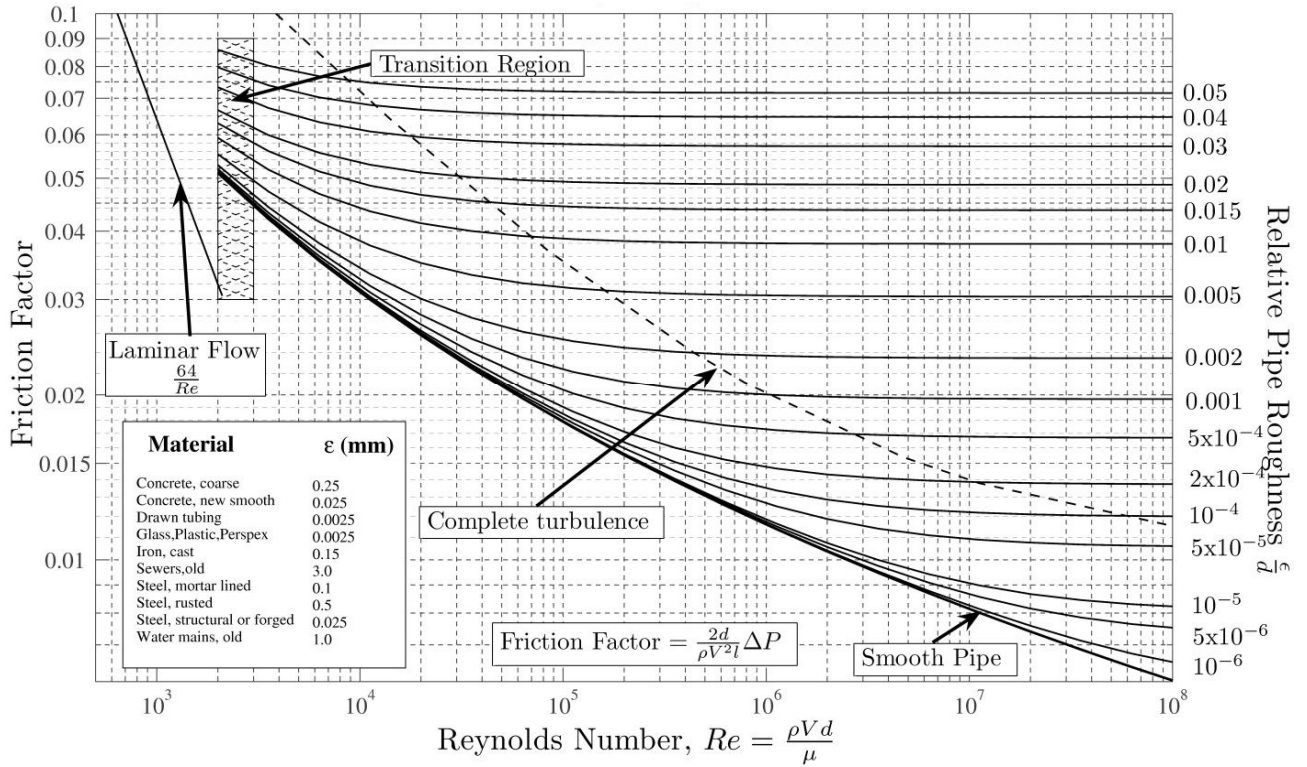


Figure 132: Le diagramme de Moody-Stanton donne une valeur au coefficient de frottement

13.2. Régime laminaire

Il a été démontré que l'écoulement en régime laminaire est susceptible d'être représenté de manière très simple (10.5). En effet, la formule de Hagen-Poiseuille traduit l'écoulement en régime laminaire dans un tube cylindrique rectiligne. Le coefficient de frottement correspondant s'écrit ainsi :

$$f = \frac{64}{Re} \quad (7.267)$$

13.3. Régime turbulent lisse

Prandtl s'occupa essentiellement de la détermination du profil de vitesse dans des canalisations à parois lisses. Il a abouti à une loi permettant de calculer le coefficient de frottement selon la formule, appelée formule de Prandtl-Von Karman :

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = -2 \log \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \quad (7.268)$$

Il faut encore relever que l'allemand Paul Richard Heinrich Blasius a proposé en 1913 une relation explicite, et par conséquent fort appréciée à l'époque, liant le coefficient de frottement f

au nombre de Reynolds Re pour les écoulements turbulents lisses. Cette « droite de Blasius », en axes logarithmiques, s'écrit :

$$f = \frac{0.3164}{Re^{1/4}} \quad (7.269)$$

13.4. Régime turbulent rugueux

Lorsque le nombre de Reynolds dépasse une valeur limite donnée approximativement par la formule :

$$Re = 560 \frac{D}{k} \quad (7.270)$$

La sous-couche laminaire est extrêmement réduite et les aspérités interfèrent directement sur le flot turbulent. On quitte la zone de transition pour aborder la zone du régime turbulent rugueux.

De 1931 à 1933, Johann Nikuradse entreprit une vaste et célèbre étude expérimentale sur les pertes de charges dans les tuyaux rugueux. En désignant par k_s la hauteur des grains de sable qu'il colla sur les parois de ses tuyaux, il a obtenu :

$$\sqrt{\frac{I}{f}} = -2 \log \frac{k_s}{3.7D} \quad (7.271)$$

qui est l'homologue de la formule de Prandtl-Von Karman pour les tuyaux lisses.

Il a observé qu'à partir d'une certaine valeur du nombre de Reynolds (d'autant plus grande que la rugosité relative était plus faible), le coefficient de rugosité f restait constant quel que soit Re , sa valeur ne dépendant que de la rugosité relative de la section. Ainsi, pour un écoulement turbulent rugueux, le nombre de Reynolds n'exerce plus d'influence sur le coefficient de perte de charge. Cette formule est valide pour des nombres de Reynolds supérieurs à celui donné par la formule développée par l'américain Moody en 1944, à savoir :

$$\sqrt{\frac{I}{f}} = \frac{Re}{260} \frac{k_s}{D} \quad (7.272)$$

13.5. Régime transitoire

Il ne reste alors que la description de la zone de transition entre le régime turbulent lisse et le régime turbulent rugueux. Sur base de l'observation de tuyaux industriels, l'anglais Colebrook propose une formulation couvrant tous les régimes d'écoulements :

$$\sqrt{\frac{l}{f}} = -2 \log \left[\frac{2.5l}{Re \sqrt{f}} + \frac{\varepsilon}{3.7D} \right] \quad (7.273)$$

Cette relation, qui n'est rien d'autre que la somme des formules de Von Karman et de Nikuradse, décrit bien le comportement des tuyaux industriels et est aujourd'hui d'usage courant, pour ne pas dire qu'elle fait référence. Pour des valeurs suffisamment faibles du nombre de Reynolds, le second terme du membre de droite l'emporte sur le premier et on retrouve la formule de Von Karman, c'est-à-dire que l'écoulement suit approximativement la loi des tuyaux lisses. Pour des valeurs élevées du nombre de Reynolds, c'est le premier terme qui l'emporte sur le second et on retombe sur la droite de Nikuradse.

13.6. Quelques coefficients de pertes de charges singulières typiques

Raccord rectiligne k=0.04

T standard

En ligne, branche fermée k=0.4

Utilisé en L entrée en ligne k=1.3

Utilisé en L entrée par la branche k=1.5

Valve à diaphragme

ouverte k=2.3

ouverte aux trois quarts k=2.6

ouverte à moitié k=4.3

Valve « globe »

ouverte k=6.4

ouverte à moitié k=9.5

Coudes commerciaux 90°

standard k=0.75

à grand rayon de courbure k=0.45

à faible rayon de courbure k=1.3

Retour à 180° avec un faible rayon de courbure k=1.6

Annexe 1 : Calcul vectoriel et tensoriel

Table des matières

1.	Définition	277
2.	Représentation dans un espace 3D.....	277
2.1.	Représentation en coordonnées cartésiennes.....	278
2.2.	Représentation en coordonnées polaires.....	279
2.3.	Représentation en coordonnées sphériques	279
3.	Opérations sur les tenseurs	280
3.1.	Addition.....	280
3.2.	Produit tensoriel	280
3.3.	Produit tensoriel contracté	280
3.4.	Produit vectoriel.....	281
4.	Opérations sur des champs tensoriel.....	281
4.1.1.	Gradient.....	282
4.1.2.	Divergence	282
4.1.3.	Rotationnel	283
4.1.4.	Laplacien.....	283
4.2.	Manipulation des opérateurs vectoriels.....	284
5.	Intégrales sur volumes et surfaces.....	284
5.1.	Théorème du gradient.....	284
5.2.	Théorème de la divergence	284
5.3.	Théorème du rotationnel	285

1. Définition

Un tenseur est un outil mathématique permettant la représentation de quantités physiques. Scalaires ou vecteurs sont des tenseurs particuliers. En toute généralité, on parlera de tenseur d'ordre N ($N > 0$). N étant le nombre de directions lui étant associées, et le nombre de ses composantes étant de 3^N . Selon cette définition, un scalaire est donc un tenseur d'ordre 0 (propriété sans direction, 1 seule composante) et un vecteur un tenseur d'ordre 1 (3 composantes donnant une direction). Enfin, un tenseur d'ordre 2 (auquel nous nous limiterons ici) prendra une forme matricielle 3×3 . Mathématiquement, le calcul tensoriel s'apparente donc au calcul matriciel vu en algèbre.

Lors d'un changement de repère défini par $\vec{e}_i = c_{ij} \vec{e}'_j$, un tenseur \mathbf{T} se transforme, par définition, selon les formules :

$$T_{ij} = c_{ij} c_{kl} T'_{kl}$$

$$T'_{kl} = c_{ik} c_{jl} T_{ij}$$

Dans ce rappel, les tenseurs d'ordre 0 seront notés en italiques, les tenseurs d'ordre 1 en italique et en gras, tandis que les tenseurs d'ordre plus grand que 1 seront notés en gras uniquement. Dans les équations, la seule différence se situera au niveau des tenseurs d'ordre 1, qui seront notés selon le formalisme classique des vecteurs, c'est-à-dire surmontés d'une flèche.

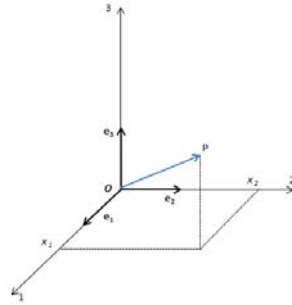
En mécanique des fluides, les tenseurs sont généralement d'ordre 2 au maximum, et le chapitre présent s'attardera dès lors plus spécifiquement à leur étude. Cependant, dans un souci de généralisation de la théorie, les différentes propriétés et définitions seront explicités pour des tenseurs arbitraires d'ordre N .

2. Représentation dans un espace 3D

Comme tous les phénomènes de mécanique, les écoulements prennent place dans un espace tridimensionnel d'Euclide. Un tenseur sera donc exprimé en coordonnées cartésiennes, mais il peut arriver, principalement pour des raisons de clarté dans des développements présentant certains niveaux de symétries, d'exprimer celui-ci en coordonnées polaires ou sphériques.

2.1. Représentation en coordonnées cartésiennes

Soit l'espace euclidien E représenté à la figure ci-dessous :



Il est défini par son origine O et par les directions de 3 axes mutuellement perpendiculaires. Les vecteurs unitaires de ces 3 axes sont notés e_1 , e_2 et e_3 , ce qui se notera simplement e_i , l'indice i prenant respectivement les valeurs (1,2,3).

Les propriétés principales de ce vecteur unitaire sont fréquemment exprimées en faisant référence au symbole de Kroneker δ_{ij} , défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ou encore, en notation matricielle

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La première propriété, évidente, des vecteurs unitaires, est l'orthogonalité :

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

Ils forment donc une base orthogonale.

Dans cette base orthogonale, un point P pourra être situé par son vecteur position \vec{x} tel que

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \vec{e}$$

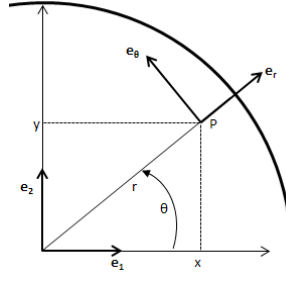
où les x_i sont les composantes de \vec{x} dans le repère E défini plus haut.

L'utilisation de la notation cartésienne peut être simplifiée en utilisant ce qui est appelé le principe de sommation d'Einstein. Selon cette convention, un indice répété amènera à une sommation sur l'ensemble des valeurs possibles de l'indice (ici 1,2 et 3). En utilisant cette convention, la représentation prend la forme :

$$\vec{x} = x_i \vec{e}_i$$

2.2. Représentation en coordonnées polaires

Tout point (x,y) peut être repéré par ses coordonnées polaires (r,θ) telles que



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

De même

$$\vec{s} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = r\vec{e}_r$$

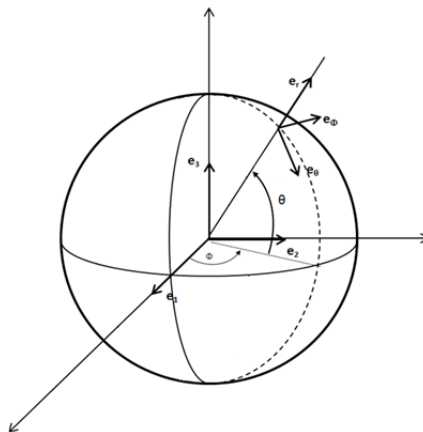
On parlera de coordonnées cylindriques lorsque l'on se situe en 3D et que la troisième coordonnées, soit z , ne subit aucune transformation, soit

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\vec{s} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

2.3. Représentation en coordonnées sphériques

Tout point (x,y,z) peut être repéré par ses coordonnées sphériques (r,θ,ϕ) telles que



$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

De même

$$\vec{s} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = r\vec{e}_r$$

3. Opérations sur les tenseurs

3.1. Addition

Deux tenseurs du même ordre peuvent être additionnés pour donner un troisième tenseur du même ordre que les deux premiers, il s'agit simplement d'additionner les différentes composantes des deux tenseurs originaux une à une.

Soit deux tenseurs \mathbf{b} et \mathbf{c} d'ordre 1 additionnés pour donner un troisième tenseur \mathbf{d} :

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= d_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \\ &= \mathbf{b} + \mathbf{c} = b_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j + c_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \\ &= (b_{ij} + c_{ij}) \vec{e}_i \vec{e}_j\end{aligned}$$

En termes de composantes, on a donc

$$d_{ij} = (b_{ij} + c_{ij})$$

3.2. Produit tensoriel

Le produit d'un tenseur d'ordre N avec un tenseur d'ordre M donnera un tenseur d'ordre $N+M$.

Soit un tenseur d'ordre 1 \mathbf{b} et un tenseur d'ordre 2 \mathbf{c} , dont le produit donne un tenseur d'ordre 3 \mathbf{d} :

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= d_{ijk} \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k \\ &= \vec{b} \cdot \mathbf{c} = (b_i \vec{e}_i) (c_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k) \\ &= b_i c_{jk} \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k\end{aligned}$$

En termes de composantes, on a donc

$$d_{ijk} = b_i c_{jk}$$

Le cas particulier du produit d'un tenseur d'ordre N avec un scalaire donne un tenseur d'ordre N , toutes les composantes du tenseur étant simplement multipliées par la valeur unique du scalaire.

3.3. Produit tensoriel contracté

Le produit intérieur d'un tenseur d'ordre N avec un tenseur d'ordre M donne un tenseur $N + M - 2$.

Soit un tenseur d'ordre 2 \mathbf{b} et un tenseur d'ordre 3 \mathbf{c} , dont le produit intérieur donne donc un tenseur d'ordre 3 \mathbf{d} :

$$\begin{aligned}
\mathbf{d} &= d_{ilm} \vec{e}_i \vec{e}_l \vec{e}_m \\
&= \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} = (b_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j) (c_{klm} \vec{e}_k \vec{e}_l \vec{e}_m) \\
&= b_{ij} c_{klm} \vec{e}_i \vec{e}_l \vec{e}_m \delta_{jk} \\
&= b_{ij} c_{jlm} \vec{e}_i \vec{e}_l \vec{e}_m
\end{aligned}$$

En termes de composantes, on a donc

$$d_{ilm} = b_{ij} c_{jlm}$$

Pour deux tenseurs d'ordre 1, le résultat donne un scalaire, et le produit intérieur porte d'ailleurs dès lors le nom de produit scalaire.

3.4. Produit vectoriel

Dans le cas particulier d'un espace euclidien à 3 dimensions, on peut définir le produit vectoriel entre deux tenseurs d'ordre 1, soit deux vecteurs (d'où le nom). Le résultat du produit vectoriel est un troisième vecteur perpendiculaire aux deux premiers. Les 3 vecteurs unitaires définis précédemment vérifient entre eux la définition du produit vectoriel.

En considérant le produit vectoriel \mathbf{b} et \mathbf{c} donnant un vecteur \mathbf{d} , on a par définition, et en utilisant abusivement la notation du déterminant :

$$\begin{aligned}
\vec{d} = \vec{b} \times \vec{c} &= \det \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= (b_2 c_3 - b_3 c_2) \vec{e}_1 + (b_3 c_1 - b_1 c_3) \vec{e}_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1) \vec{e}_3
\end{aligned}$$

L'orientation du vecteur créé est donnée par la règle dite « de la main droite ».

4. Opérations sur des champs tensoriel

Un champ de tenseur est une application qui associe à chaque point de l'espace un tenseur différent. Les opérations présentées ici concernent toutes l'application du tenseur gradient, via une des opérations présentées au chapitre précédent. Le tenseur gradient, appelé nabla, est représenté par le vecteur, en coordonnées cartésiennes :

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i$$

Lors d'un changement de variables, il faut réévaluer les opérateurs de dérivation, en ayant recours à la matrice Jacobienne du changement de variables.

En coordonnées polaires, nous avons :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \end{cases}$$

Pour les coordonnées sphériques, le même raisonnement donne :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{cases}$$

4.1.1. Gradient

Le gradient d'un tenseur est obtenu en appliquant l'opérateur gradient à un champ tensoriel.

Par exemple, si $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ est un champ tensoriel d'ordre 2, on a

$$\vec{b}(x) \equiv b_{ij}(x) \vec{e}_i \vec{e}_j$$

et le gradient du champs tensoriel \mathbf{b} donne

$$\begin{aligned} \nabla \vec{b}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i b_{jk}(x) \vec{e}_j \vec{e}_k \\ &= \frac{\partial b_{jk}(x)}{\partial x_i} \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k \end{aligned}$$

L'application du gradient à un champ tensoriel d'ordre N revient en fait à effectuer le produit du tenseur particulier gradient avec le champ tensoriel, et donne un champ tensoriel d'ordre $N + 1$.

En particulier, l'application du gradient à une propriété scalaire donne un vecteur.

Pour obtenir l'expression du gradient en coordonnées polaires ou sphériques, il suffit simplement d'appliquer les opérateurs correspondants.

4.1.2. Divergence

La divergence d'un champ tensoriel est en fait le produit intérieur de l'opérateur gradient et du champ tensoriel considéré.

On a dès lors

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{b}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i \cdot b_{jk}(x) \vec{e}_j \vec{e}_k \\
 &= \frac{\partial b_{jk}(x)}{\partial x_i} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \vec{e}_k \\
 &= \frac{\partial b_{jk}(x)}{\partial x_i} \delta_{ij} \vec{e}_k \\
 &= \frac{\partial b_{ik}(x)}{\partial x_i} \vec{e}_k
 \end{aligned}$$

En général, la divergence d'un tenseur d'ordre N est un tenseur d'ordre $N - 1$.

En particulier, la divergence d'un vecteur donne donc un scalaire.

Pour obtenir l'expression du gradient en coordonnées polaires ou sphériques, il suffit simplement d'appliquer les opérateurs correspondants.

4.1.3. Rotationnel

Le rotationnel d'un champ tensoriel est en fait le produit vectoriel de l'opérateur gradient et du champ tensoriel, qui se réduit donc à un champ vectoriel.

On a dès lors

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{b}(x) &= \det \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ b_1(x) & b_2(x) & b_3(x) \end{vmatrix} \\
 &= \left(\frac{\partial b_3(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial b_2(x)}{\partial x_3} \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial b_1(x)}{\partial x_3} - \frac{\partial b_3(x)}{\partial x_1} \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial b_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial b_1(x)}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3
 \end{aligned}$$

4.1.4. Laplacien

Le Laplacien est l'opérateur scalaire

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \vec{e}_j \right) \\
 &= \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}
 \end{aligned}$$

En coordonnées polaires et sphériques, le Laplacien devient respectivement, en ayant développés les termes de dérivées secondes :

$$\begin{aligned}
 \Delta_{polaire} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\
 \Delta_{sphérique} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}
 \end{aligned}$$

4.2. Manipulation des opérateurs vectoriels

Les règles suivantes sur les opérateurs différentiels peuvent être obtenues à partir de l'analyse mathématique :

$$\begin{aligned}
 \nabla(f + g) &= \nabla f + \nabla g \\
 \nabla \cdot (f + g) &= \nabla \cdot f + \nabla \cdot g \\
 \Delta(f + g) &= \nabla \cdot \nabla(f + g) \\
 &= \nabla \cdot (\nabla f + \nabla g) \\
 &= \nabla \cdot \nabla f + \nabla \cdot \nabla g \\
 &= \Delta f + \Delta g \\
 \nabla \times (f + g) &= \nabla \times f + \nabla \times g
 \end{aligned}$$

Plus particulièrement, la troisième relation sera retenue sous le nom de « principe de superposition ». Ces différentes relations sont valables si les fonctions f et g sont des champs vectoriels deux fois continuellement dérivables. Les relations établies sont valables quel que soit le repère à condition de considérer la transformation adéquate des opérateurs dans le repère étudié.

5. Intégrales sur volumes et surfaces

Les intégrales des différents opérateurs tensoriels donnent lieu à des théorèmes intéressants.

5.1. Théorème du gradient

Soit un volume V et A le bord de V , on a

$$\int_V \nabla f dV = \int_A f d\vec{A}$$

5.2. Théorème de la divergence

Soit un volume V et A le bord de V , on a

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \int_A \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

De ce théorème peut être déduit un lemme intéressant. Le champ F peut être redéfini comme étant le produit d'un scalaire et d'un gradient. En supposant les scalaires f et g , on peut avoir tour à tour :

$$\vec{F} = \begin{cases} f \nabla g \\ g \nabla f \end{cases}$$

On a dès lors

$$\int_V \nabla \bullet \vec{F} dV = \begin{cases} \int_V \nabla \bullet (f \nabla g) dV = \int_V (\nabla f \bullet \nabla g + f \nabla^2 g) dV \\ \int_V \nabla \bullet (g \nabla f) dV = \int_V (\nabla g \bullet \nabla f + g \nabla^2 f) dV \end{cases}$$

$$\int_A \vec{F} \bullet d\vec{A} = \int_A \vec{n} \bullet \vec{F} dA = \begin{cases} \int_A \vec{n} \bullet (f \nabla g) dA = \int_A f \vec{n} \bullet (\nabla g) dA = \int_A f \frac{\partial g}{\partial n} dA \\ \int_A \vec{n} \bullet (g \nabla f) dA = \int_A g \vec{n} \bullet (\nabla f) dA = \int_A g \frac{\partial f}{\partial n} dA \end{cases}$$

Et, au final, on a donc successivement

$$\int_A f \frac{\partial g}{\partial n} dA = \int_V (\nabla f \bullet \nabla g + f \nabla^2 g) dV$$

$$\int_A g \frac{\partial f}{\partial n} dA = \int_V (\nabla g \bullet \nabla f + g \nabla^2 f) dV$$

Et, en effectuant la différence de ces deux équations, la forme suivante apparaît :

$$\int_A \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA = \int_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV$$

5.3. Théorème du rotationnel

Soit un volume V et A le bord de V, on a

$$\int_V \nabla \times C dV = - \int_A \vec{F} \times d\vec{A}$$

Annexe 2 : Notions cinématiques

Objectifs

- Rappel de la notion de référentiel d'inertie
- Notions d'écoulements stationnaires et instationnaires
- Description cinématique d'un écoulement
 - Trajectoire et ligne de courant
 - Description Lagrangienne et Eulérienne

Table des matières

1.	Référentiel d'inertie.....	289
2.	Stationnaire vs instationnaire	289
3.	Description cinématique d'un écoulement.....	289
3.1.	Trajectoire d'une particule	290
3.2.	Ligne de courant.....	290
3.3.	Ecoulement autour d'un cylindre.....	292
3.3.1.	Ligne de courant.....	292
3.3.2.	Trajectoire	295
4.	Descriptions Lagrangienne et Eulérienne	296
4.1.	Description Lagrangienne	297
4.2.	Description Eulérienne.....	297
4.3.	Vitesses et dérivées	298

1. Référentiel d'inertie

Le principe de conservation de la quantité de mouvement énoncé par Newton permet de définir un référentiel d'inertie :

« Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état. »

Un référentiel dans lequel cette loi est valide est par définition un référentiel d'inertie. De plus, dans ce dernier, la célèbre loi de Newton qui lie les forces appliquées sur un corps à l'accélération de celui-ci est applicable :

$$\sum \vec{F}_i = m \vec{a} \quad (9.1)$$

Soit un avion sur lequel agit un ensemble de forces dont la résultante est nulle. Dans un référentiel d'inertie, cet avion sera à vitesse constante alors que dans tout autre référentiel, cela ne sera pas le cas.

2. Stationnaire vs instationnaire

En mécanique des fluides, les écoulements peuvent être classés selon leur dépendance au temps :

- écoulement stationnaire ;
- écoulement instationnaire.

Un écoulement stationnaire est un écoulement qui ne dépend pas du temps. Par conséquent, les dérivées partielles des grandeurs de l'écoulement par rapport au temps sont nulles. Au contraire, dans un écoulement instationnaire, les variables de l'écoulement dépendent du temps.

Il est à noter que le type d'écoulement dépend du référentiel choisi. En effet, l'écoulement n'est stationnaire que par rapport à une famille de référentiels dont les membres individuels sont au repos l'un par rapport à l'autre.

3. Description cinématique d'un écoulement

Afin de décrire un écoulement du point de vue cinématique, il faut connaître deux champs :

- le champ vectoriel de vitesse : $\vec{U}(\vec{r}, t)$
- les vecteurs position associés : $\vec{r}(x, y, z)$

De plus, le champ vectoriel de vitesse peut être d'illustré de deux manières différentes :

- les trajectoires des particules ;
- les lignes de courant.

3.1. Trajectoire d'une particule

La première méthode consiste à calculer la trajectoire d'une particule qui est, par définition, le lieu des endroits où se trouve la particule quand le temps varie.

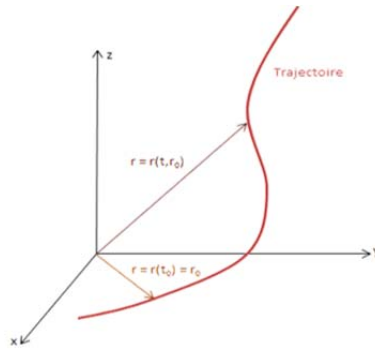


Figure 133 : Trajectoire d'une particule

Dans cette optique, la vitesse $\vec{U}(\vec{r}, t)$ est définie par la dérivée du vecteur position par rapport au temps :

$$\vec{U} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (9.2)$$

La trajectoire d'une particule est la solution du système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = \frac{dx}{dt} \\ v(x, y, z, t) = \frac{dy}{dt} \\ w(x, y, z, t) = \frac{dz}{dt} \end{cases} \quad (9.3)$$

Dans (9.3) **t est une variable.**

3.2. Ligne de courant

L'autre méthode consiste à déterminer les lignes de courants. Par définition, une ligne de courant est une ligne qui, à un **instant t fixé**, possède en chacun de ses points une tangente parallèle au vecteur vitesse \vec{U} . Les lignes de courant répondent aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \\ \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{dz}{dt} = w \end{cases} \quad (9.4)$$

En effet, dans chaque plan x - y , y - z , x - z , l'inclinaison de la projection d'une ligne de courant est donnée par rapport aux composantes du vecteur vitesse dans ce plan.

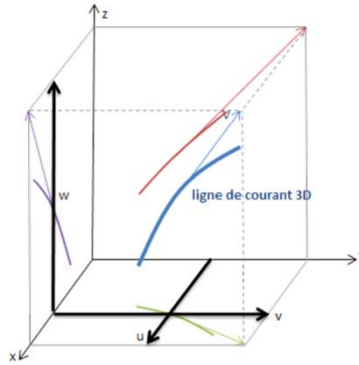


Figure 134 : Ligne de courant dans un repère 3D

Les lignes de courant sont donc données par la solution du système d'équations différentielles :

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} \quad (9.5)$$

Dans (9.5), **t a une valeur fixe** et joue le rôle d'un paramètre. Par définition, les lignes de courant ne se croisent jamais¹⁶

Il sera question de surface de courant pour une série de lignes de courant adjacentes (aucune particule ne peut pénétrer la surface), et de tube de courant pour une surface engendrée par l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur un contour fermé C choisi arbitrairement dans le fluide.

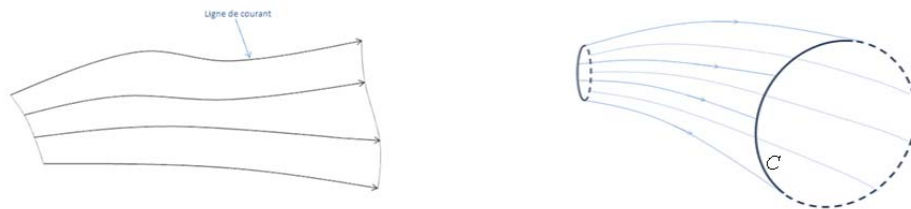


Figure 135 : Surface et tube de courant

Pour un écoulement *instationnaire*, les lignes de courant changent de position en fonction du temps. Au contraire, dans le cas où les lignes de courants sont fixes, l'écoulement est

¹⁶ hormis en certains points appelés points d'arrêt.

stationnaire. Dans le cas particulier d'un écoulement stationnaire, lignes de courant et trajectoires se confondent, les particules suivant alors continuellement les mêmes trajectoires.

3.3. Écoulement autour d'un cylindre

Soit un référentiel d'inertie défini par les axes x, y, z (Figure 136) dans lequel évolue un cylindre infiniment long selon z , en translation selon x , à vitesse constante $\vec{U} = (U_\infty, 0, 0)$. Dans les paragraphes qui suivent, les lignes de courant autour du cylindre ainsi que les trajectoires des particules environnantes sont étudiées. L'écoulement dans l'espace est ainsi utilement ramené à l'étude dans un plan (x, y) .

3.3.1. Ligne de courant

Les développements qui suivent visent à déterminer l'expression mathématique des lignes de courant. Pour ce faire, la définition d'un nouveau référentiel d'inertie est nécessaire. Soit x', y', z' , les axes du référentiel choisi. Ce dernier est mobile et lié au cylindre. C'est-à-dire que du point de vue du référentiel, le cylindre est fixe, soit $\vec{U}_{\text{cylindre}} = (0, 0, 0)$, et l'écoulement autour de celui-ci est stationnaire avec $\vec{U} = (U_\infty, 0, 0)$.

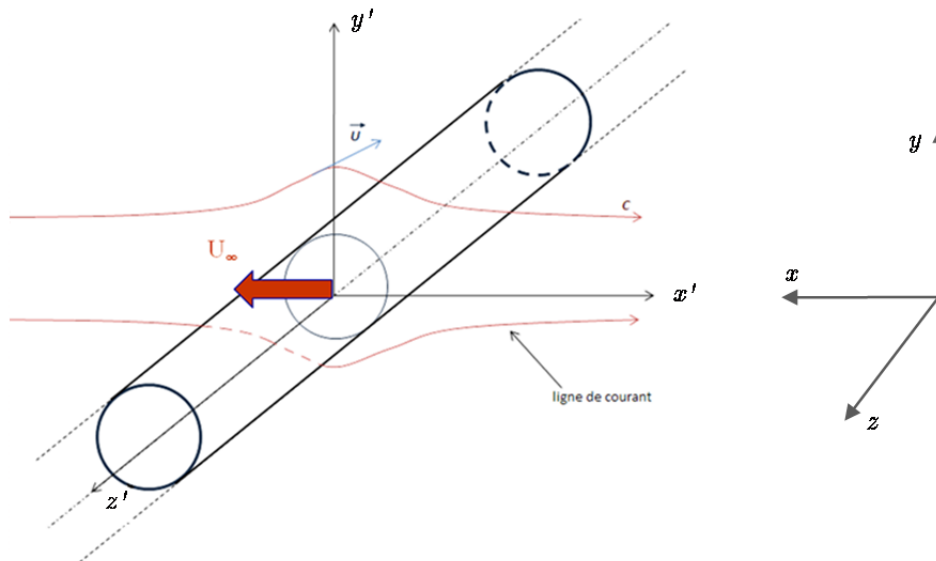
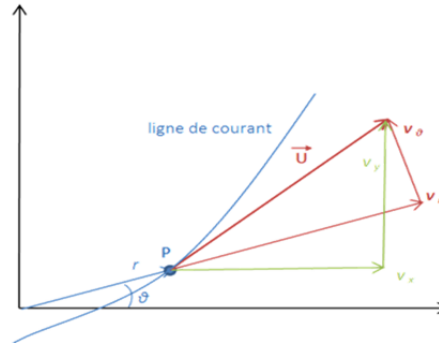


Figure 136 : écoulement autour d'un cylindre

Le système d'équation différentiel (9.5) définit mathématiquement les lignes de courant en coordonnées cartésiennes. À l'aide de la Figure 136 et de la Figure 137, il est possible de traduire ce système en coordonnées polaires. La Figure 137 représente une ligne de courant à un moment t fixé. Par définition, la tangente à la ligne de courant en P représente la direction de la vitesse \vec{U} au point P et au temps t . Cette vitesse peut être décomposée en composantes polaires (v_r, v_θ) .

Figure 137 : Lignes de courants en t fixé

En utilisant les coordonnées polaires $r - \theta$ dans le plan $x'-y'$, telles que

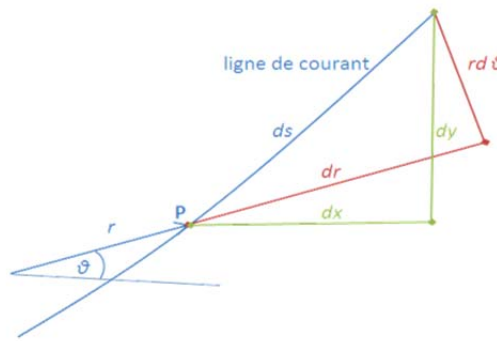
$$\begin{aligned} x' &= r \cos \theta \\ y' &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (9.6)$$

il peut être démontré que les composantes v_r et v_θ du vecteur vitesse \vec{U} en coordonnées polaires sont :

$$\begin{cases} v_r = U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ v_\theta = -U_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \end{cases} \quad (9.7)$$

avec a le rayon du cylindre.

Au voisinage immédiat du point P (Figure 138), il est également possible de décomposer un élément ds le long de la ligne de courant dans les directions r et θ ;

Figure 138 : Ligne de courant au voisinage du point P en t fixé

À l'aide des figures ci-dessus, l'équivalent de (9.5) en coordonnées polaire peut donc être exprimé comme :

$$\frac{r d\theta}{dr} = \frac{v_\theta}{v_r} \quad (9.8)$$

En substituant (9.7) dans (9.8), il vient :

$$\frac{rd\theta}{dr} = \frac{-(r^2 + a^2)\sin\theta}{(r^2 - a^2)\cos\theta} \quad (9.9)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\tan\theta}d\theta = \frac{(r^2 + a^2)}{(r^2 - a^2)}\frac{dr}{r}$$

En intégrant (9.9) :

$$\Leftrightarrow -\int \frac{1}{\tan\theta}d\theta = \int \frac{(r^2 + a^2)}{(r^2 - a^2)}\frac{dr}{r} \quad (9.10)$$

$$\Leftrightarrow -\ln|\sin\theta| + \ln C = \ln\left|\frac{(r^2 - a^2)}{r}\right| \quad \text{pour } 0 \leq \theta \leq \pi \quad (9.11)$$

où C est une constante d'intégration.

Pour le domaine $r > a$, il vient :

$$C = \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)r \sin\theta = y' \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \quad (9.12)$$

Si $r \rightarrow \infty$, $C \rightarrow y'$. C'est-à-dire que plus l'éloignement par rapport au cylindre est grand, plus les lignes de courant auront tendance à former des droites parallèles équidistantes.

D'autres part, la ligne de courant obtenue pour $C = 0$ est donnée par

- $y' = 0$ pour $r > a$: l'axe des abscisses de part et d'autre du cercle fait partie d'une ligne de courant
- $y' \neq 0$ pour $r = a$: le cercle $r = a$ fait partie d'une ligne de courant.

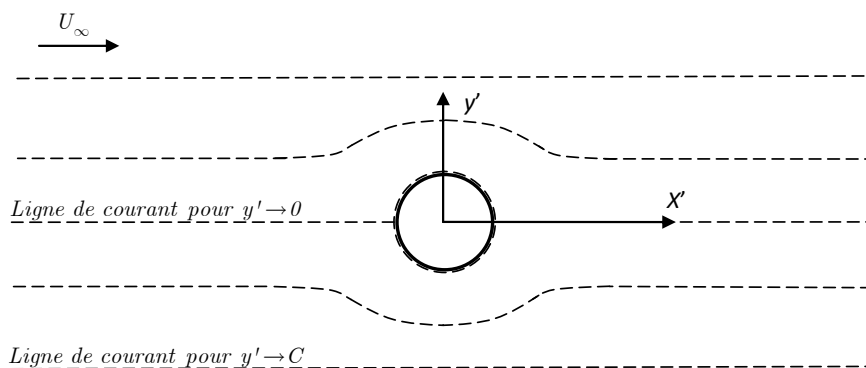


Figure 139 : Lignes de courants d'un écoulement stationnaire autour d'un cylindre

Sur la ligne de courant correspondant à $C = 0$, deux points d'arrêts existent aux endroits où la ligne de courant rencontre le cercle.

3.3.2. Trajectoire

À présent, ce sont les trajectoires des particules au passage du cylindre qui sont étudiées. Le référentiel d'inertie est fixe alors que le cylindre est en mouvement à vitesse constante $\vec{U}_{\text{cylindre}} = (U_\infty, 0, 0)$, avec x opposé à x' .

Pour résoudre les équations (9.3), il faut déterminer les composantes de vitesse dans le référentiel choisi. Les équations (9.7) donnent ces composantes dans le cadre d'un système fixe par rapport au cylindre. Les composantes de la vitesse \vec{U} dans les coordonnées cartésiennes liées au cylindre (axes x', y', z') sont calculées. En examinant la Figure 137, il vient:

$$\begin{cases} v_x' = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta \\ v_y' = v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \end{cases} \quad (9.13)$$

En considérant (9.7) il vient :

$$\begin{cases} v_x' = U_\infty \left(1 + \frac{a^2 \left((y')^2 - (x')^2 \right)}{\left((y')^2 + (x')^2 \right)^2} \right) \\ v_y' = -2U_\infty \frac{a^2 x' y'}{\left((y')^2 + (x')^2 \right)^2} \end{cases} \quad (9.14)$$

La translation entre le référentiel fixe cartésien x, y, z et le référentiel mobile cartésien x', y', z' est exprimée de la manière suivante :

$$\begin{cases} x = x' - U_\infty t \\ y = y' \end{cases} \quad (9.15)$$

En substituant x' et y' dans (9.14) tels que donné par (9.15) :

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = U_\infty \left(\frac{a^2 \left(y^2 - (x + U_\infty t)^2 \right)}{\left(y^2 + (x + U_\infty t)^2 \right)^2} \right) \\ \frac{dy}{dt} = -2U_\infty \frac{a^2 (x + U_\infty t) y}{\left(y^2 + (x + U_\infty t)^2 \right)^2} \end{cases} \quad (9.16)$$

Les équations (9.16) définissent les trajectoires à partir du référentiel d'inertie choisi.

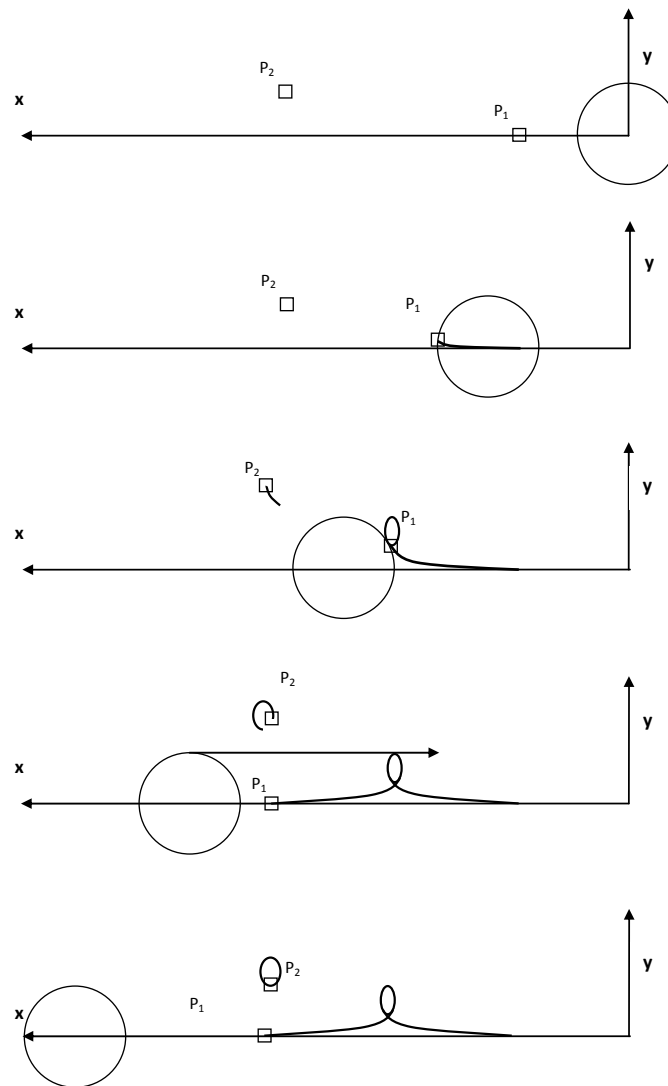


Figure 140 : Trajectoires de deux particules fluides engendrées par le mouvement de translation d'un cylindre dans un fluide au repos.

Les comportements des particules sont différents selon leur emplacement initial par rapport au cylindre.

4. Descriptions Lagrangienne et Eulérienne

Il existe deux méthodes pour décrire mathématiquement un écoulement :

- la méthode Lagrangienne ;
- la méthode Eulérienne.

Selon le cas d'étude, il est préférable de choisir l'une ou l'autre méthode.

Dans ce qui suit, \vec{X} désigne le vecteur position d'une particule le long de sa trajectoire. C'est une fonction du temps t et de \vec{X}_0 , sa position d'origine. Le vecteur \vec{x} est quant à lui un lieu fixe de l'espace et ne dépend donc pas du temps.

4.1. Description Lagrangienne

Dans cette description, c'est le mouvement d'une particule de fluide qui est étudié. Le vecteur lieu \vec{X}_0 de la particule à un temps initial t_0 est utilisé comme « étiquette ». L'image de l'écoulement d'une particule est complète lorsque l'expression du vecteur lieu \vec{X} , fonction de \vec{X}_0 et du temps t , est connue : $\vec{X} = \vec{X}(\vec{X}_0, t)$.

Sur la Figure 141, la courbe représente la trajectoire de la particule. C'est-à-dire l'évolution temporelle de la position d'une particule donnée.

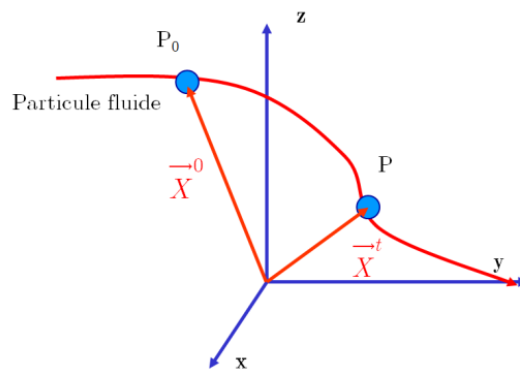


Figure 141 : Description Lagrangienne

4.2. Description Eulérienne

Dans cette description toutes les grandeurs de l'écoulement sont données comme fonctions du vecteur lieu \vec{x} et du temps t . Par exemple, le champ de vitesse est donné par $\vec{U} = \vec{U}(\vec{x}, t)$. Ainsi, l'observateur décrit l'état des particules passant en un *lieu* donné.

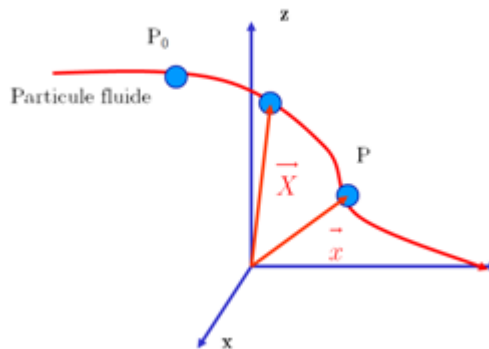


Figure 142 : Description Eulérienne

Il est important de noter que la description Eulérienne n'est pas complète. En effet, pour obtenir la trajectoire d'une particule quand le champ vectoriel de vitesse est connu, il faudrait intégrer les équations (9.5) avec la condition initiale $\vec{X} = \vec{X}_0$ au temps $t = t_0$.

Remarque : les grandeurs au temps t en un lieu \vec{x} dépendent des particules dont les positions successives sont notées \vec{X} passant en t .

4.3. Vitesses et dérivées

En description Lagrangienne, c'est la vitesse d'une particule donnée le long de sa trajectoire qui est étudiée. Pour t fixé, un vecteur vitesse $\vec{U}(\vec{X}(t))$ est associé à la particule.

$$\vec{U} = \vec{U}(\vec{X}(t)) = \frac{\partial \vec{x}(\vec{X}(t))}{\partial t} \quad (9.17)$$

La solution de l'écoulement au temps t fixé, est la position et le vecteur vitesse associé à chaque particule.

En description Eulérienne, c'est la vitesse en un lieu \vec{x} qui est étudiée. Au temps t fixé, la vitesse est définie comme la vitesse des particules qui passent en \vec{x} :

$$\vec{U} = \vec{U}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{X}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (9.18)$$

La solution de l'écoulement au temps t fixé est un vecteur vitesse associé **à chaque lieu de l'espace** en cet instant t .

Il est donc important de noter que la définition de vitesse n'est pas la même selon la description choisie :

$$\vec{U}(\vec{X}(t)) \neq \vec{U}(\vec{x}, t) \quad (9.19)$$

Soit $\Phi(x, y, z, t)$ une fonction de l'espace et du temps. La dérivée Lagrangienne de Φ est notée :

$$\frac{\partial \Phi(\vec{X}(t))}{\partial t} \quad (9.20)$$

La dérivée Eulérienne de Φ est notée

$$\frac{\partial \Phi(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (9.21)$$

En mécanique des fluides, l'approche Eulérienne est souvent privilégiée. En effet, il n'est pas aisé (et souvent inutile) d'obtenir les trajectoires des particules. Pour cette raison, la méthode d'Euler est souvent plus adéquate. Au lieu de suivre une particule le long de sa trajectoire, l'étude est concentrée sur un *lieu donné de l'espace*. À chaque instant, des particules différentes passent par ce lieu considéré. Les variations temporelles de la vitesse, de la pression, ... y sont évaluées.

Annexe 3 : Equations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques

1. Expressions des équations de N-S dans les deux systèmes de coordonnées

Les équations de Navier-Stokes écrites en coordonnées cartésiennes peuvent être réécrites en coordonnées cylindriques. Dans les développements ci-dessous, le fluide est considéré comme *incompressible* et les variations dans la direction z sont négligées.

La vitesse \vec{U} est alors donnée par:

$$\vec{U} = u \vec{e}_x + v \vec{e}_y \quad (10.1)$$

Le système en coordonnées cartésiennes s'écrit :

- Equation de continuité (conservation de la masse) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (10.2)$$

- Equation de quantité de mouvement selon x :

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (10.3)$$

- Equation de quantité de mouvement selon y :

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (10.4)$$

En coordonnées cylindriques, la vitesse \vec{U} est exprimée par rapport à ses composantes dans les directions \vec{e}_r et \vec{e}_θ par :

$$\vec{U} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta \quad (10.5)$$

L'équivalent de (10.2), (10.3) et (10.4) en coordonnées cylindrique s'écrit :

- Equation de continuité

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (10.6)$$

- Equation de quantité de mouvement selon \vec{e}_r

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_r \\ &+ \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (10.7)$$

- Equation de quantité de mouvement selon \vec{e}_θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta v_r}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta \\ &+ \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (10.8)$$

2. Démonstration

Dans cette section, le passage de coordonnées cartésiennes au coordonnées cylindrique est démontré pour l'équation (10.7).

2.1. Changement de repère

Lorsqu'un vecteur exprimé en coordonnées cartésiennes est multiplié à gauche par la matrice de changement de base inverse, le résultat obtenu est le vecteur considéré exprimé dans les coordonnées cylindriques :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial t} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (10.9)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = -\sin \theta \frac{\partial u}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial v}{\partial t} \quad (10.10)$$

2.2. Termes non visqueux

Dans un premier temps, seuls les termes non visqueux de (10.3) et (10.4) sont considérés:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \quad (10.11)$$

En substituant (10.11) dans (10.10) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = & -\sin \theta g_x + \frac{1}{\rho} \sin \theta \frac{\partial p}{\partial x} + u \sin \theta \frac{\partial u}{\partial x} + v \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} \\ & + \cos \theta g_y - \frac{1}{\rho} \cos \theta \frac{\partial p}{\partial y} - u \cos \theta \frac{\partial v}{\partial x} - v \cos \theta \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (10.12)$$

Les dérivées elles aussi doivent être exprimées dans le repère des coordonnées cylindriques :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\frac{1}{r} \sin \theta \\ \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (10.13)$$

En remplaçant les dérivées dans (10.12) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = & -\sin \theta g_x + \frac{1}{\rho} \sin \theta \left(\cos \theta \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \\
& + u \sin \theta \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\
& + v \sin \theta \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\
& + \cos \theta g_y - \frac{1}{\rho} \cos \theta \left(\sin \theta \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \\
& - u \cos \theta \left(\cos \theta \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\
& - v \cos \theta \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)
\end{aligned} \tag{10.14}$$

Les composantes de la vitesse et de la gravité en coordonnées cylindriques peuvent être mises en évidence :

$$\begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{10.15}$$

$$\begin{bmatrix} g_r \\ g_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} \tag{10.16}$$

Ce qui donne au final :

$$\Rightarrow \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = g_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r} v_\theta v_r \tag{10.17}$$

2.3. Terme visqueux

L'équation (10.17) a été obtenue en négligeant les termes visqueux. À présent, en ne considérant que ces derniers dans (10.4) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \end{cases} \tag{10.18}$$

En combinant la partie visqueuse des deux équations de quantité de mouvement en coordonnées cartésiennes, il vient :

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = -\sin \theta \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) + \cos \theta \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \tag{10.19}$$

De nouveau les dérivées en coordonnées cylindriques sont exprimées grâce à (10.13) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = & -\sin \theta \cos \theta \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial r} + \sin^2 \theta \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial \theta} \\
& + \left(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta \right) \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial r} - \frac{2}{r} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \theta} \\
& + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos^2 \theta \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{10.20}$$

Par un changement de variable, les contraintes définies en les coordonnées cylindriques sont exprimées :

$$\begin{cases} \tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = 2\mu \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \quad = 2\mu \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = 2\mu \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \end{cases} \quad (10.21)$$

Il faut encore déterminer la dérivées par rapport à r et à θ de chaque composante du tenseur contrainte :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial r} &= 2 \left(\cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \right) \\ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial \theta} &= 2 \left(-\sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial r} &= \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} \end{aligned} \quad (10.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \theta} &= \cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ &\quad - \sin \theta \frac{\partial v}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial r} &= 2 \left(\sin \theta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \cos \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} \right) \\ \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial \theta} &= 2 \left(\cos \theta \frac{\partial v}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (10.23)$$

En remplaçant les dérivées des contraintes dans l'expression (10.20) et en combinant les sinus et les cosinus de façon adéquate, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} &= \frac{2}{r} \left(-\sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} \right) + \left(-\sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \cos \theta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) \\ &\quad + \frac{2}{r^2} \left(-\sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \cos \theta \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (10.24)$$

Étant donné (10.15), chacun des termes de (10.24) peut être exprimé :

- 1^{er} terme :

$$\frac{2}{r} \left(-\sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \quad (10.25)$$

- 2^{ème} terme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - (-u \sin \theta + v \cos \theta) \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \end{aligned} \quad (10.26)$$

• 3^{ème} terme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} \right) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - (-u \sin \theta + v \cos \theta) \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (10.27)$$

• 4^{ème} terme :

$$\left(-\sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \cos \theta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) = \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} \quad (10.28)$$

• 5^{ème} terme :

$$\begin{aligned} \frac{2}{r^2} \left(-\sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \cos \theta \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) &= \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \left(-\cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right) \\ &= \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - (-u \cos \theta - v \sin \theta) \right) + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - (-u \sin \theta + v \cos \theta) \right) \\ &= \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \\ &= \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_\theta \right) \end{aligned} \quad (10.29)$$

En regroupant les 5 termes développés ci-dessus :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} &= \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} v_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} \\ &\quad + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{4}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} v_\theta \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{3}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} \end{aligned} \quad (10.30)$$

Le dernier terme du membre de droite dans (10.30) peut être exprimé en fonction des dérivées premières et secondes par rapport à θ .

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \quad (10.31)$$

En utilisant l'équation de continuité (10.6) en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} &= -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{v_r}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (10.32)$$

L'expression des termes visqueux en coordonnées cylindriques est finalement obtenue en substituant (10.32) dans (10.30) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_\theta}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{3}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \\
&\quad - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} v_\theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{10.33}$$